

Konkave und konvexe Funktionen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

8.2 Definitionen

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

8.5 Tests der ersten Ableitung

Aufgabe 8.3.3 von Seite 378

8.6 Wendestellen

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

Wurzel & arithmetisches Mittel

Mittlere quadratische Abweichung

Quadrat & arithmetisches Mittel

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

Nehme an, dass ein Unternehmen Kosten für die Produktion von $Q \geq 0$ Einheiten ihres Produkts hat, gegeben durch die strikt konvexe Funktion $c : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$, wobei $c(0) = 0$.

Nehme auch an, dass das Unternehmen die Möglichkeit hat, einen zweiten Betrieb zu eröffnen mit derselben Kostenfunktion und dann einen Teil seiner Produktion in dem zweiten Betrieb herzustellen.

Sollte es das tun?

Aufgabe 8.3.3 von Seite 378

Die Funktionen f und g seien beide zweimal differenzierbar und konkav.

Zeige: Wenn g monoton wachsend ist, dann ist die verkettete Funktion $g \circ f$ auch konkav.

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

Sei f für alle x definiert durch

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$$

- a) Bestimme die Stellen c , an denen $f'(c) = 0$ und bestimme die Intervalle, in denen f monoton wachsend ist.
- b) Bestimme die Wendestelle für f .

Wurzel & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe x_1, \dots, x_n an, dass $x_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i \neq j$.

Behauptung: Die Wurzel des arithmetischen Mittels der Beobachtungen x_i ist größer als das arithmetische Mittel der Wurzel der Beobachtungen x_i :

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

- Begründe die Behauptung für $n = 2$
- Benutze die vollständige Induktion, um die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. (Schwer, nicht relevant für die Klausur.)

Mittlere quadratische Abweichung

Die mittlere quadratische Abweichung einer Stichprobe x_1, \dots, x_n ist üblicherweise in Bezug auf das arithmetische Mittel \bar{x} dieser Stichprobe definiert.

Betrachte nun die mittlere quadratische Abweichung in Bezug auf eine beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$s^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda)^2$$

Ist s^2 strikt konkav, konkav, konvex oder strikt konvex in λ ?

Quadrat & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe x_1, \dots, x_n an, dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.

Behauptung: Das arithmetische Mittel der Quadrate der Beobachtungen x_i ist größer als das Quadrat des arithmetischen Mittels der Beobachtungen x_i :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 > \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \bar{x}^2$$

- Begründe die Behauptung für $n = 2$
- Zeige die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. (Schwer, nicht relevant für die Klausur.)