Übung 3 zu Kapitel 8:[1]

Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

8.2 Definitionen
Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

8.5 Tests der zweiten Ableitung
Aufgabe 8.5.3 von Seite 378

8.6 Wendestellen
Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

Wurzel & arithmetisches Mittel

Mittlere quadratische Abweichung

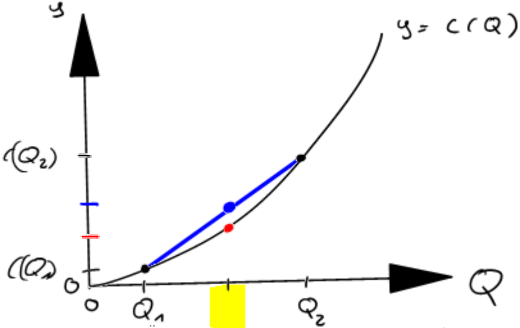
Quadrat & arithmetisches Mittel

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

Nehme an, dass ein Unternehmen Kosten für die Produktion von $Q \geq 0$ Einheiten ihres Produkts hat, gegeben durch die strikt konvexe Funktion c, wobei $c(0) = 0$.

Nehme auch an, dass das Unternehmen die Möglichkeit hat, einen zweiten Betrieb zu eröffnen mit derselben Kostenfunktion und dann einen Teil seiner Produktion in dem zweiten Betrieb herzustellen.

Sollte es das tun?



$c(\lambda Q_1 + (1-\lambda) Q_2)$

$<$

$\lambda c(Q_1) + (1-\lambda) c(Q_2)$

für alle Q_1, Q_2 mit $Q_1 \neq Q_2$

und für alle $0 < \lambda < 1$

Gewinn nur ein Betrieb

Erlös

$$R(Q) - C(Q)$$

Gewinn zwei Betriebe

$$R(Q_1 + Q_2) - C(Q_1) - C(Q_2)$$

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$R(Q) - C(Q_1) - C(Q_2)$$

Gewinn bei zwei Betrieben größer, falls

$$\underbrace{C(\overset{\frac{1}{2}Q}{Q_1}) + C(\overset{\frac{1}{2}Q}{Q_2})}_{\text{zwei Betriebe}} < \underbrace{C(\overbrace{Q_1 + Q_2}^{Q})}_{\text{ein Betrieb}}$$

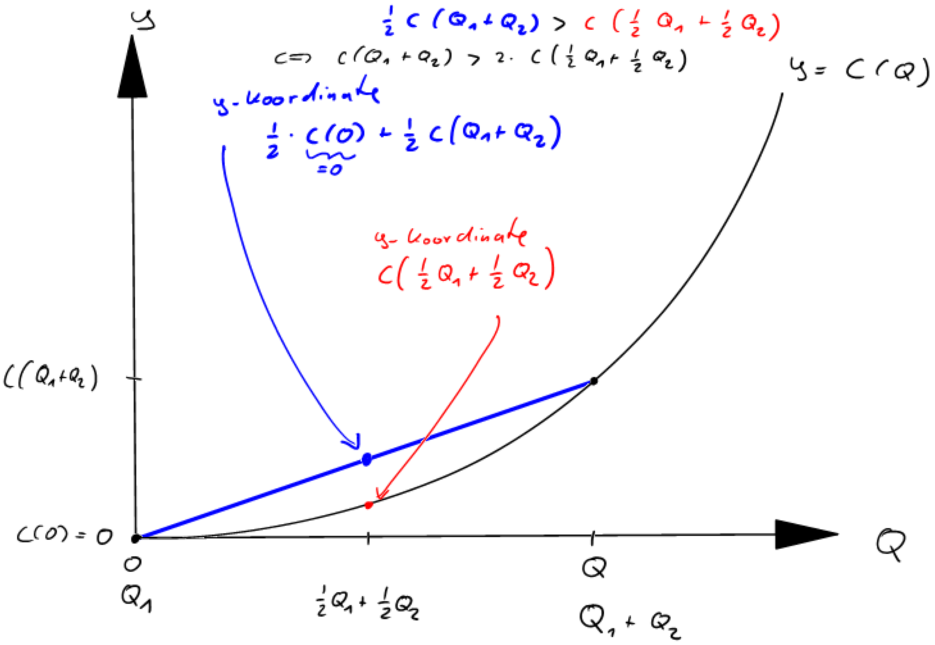
$$C\left(\tfrac{1}{2} Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2\right)$$

$$<$$

$$\tfrac{1}{2} C(Q_1) + \tfrac{1}{2} C(Q_2)$$

$$2C\left(\tfrac{1}{2} Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2\right)$$

$$< C(Q_1) + C(Q_2)$$



$\frac{1}{2} c(Q_1 + Q_2) > c(\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_2)$
$\Leftrightarrow c(Q_1 + Q_2) > 2 \cdot c(\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_2)$
$y = c(Q)$
y-Koordinate
$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{c(0)}_{=0} + \frac{1}{2} c(Q_1 + Q_2)$
y-Koordinate
$c(\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_2)$
y
$c(Q_1+Q_2)$
$c(0) = 0$
0
Q_1
$\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_2$
Q
$Q_1 + Q_2$
Q

Aufgabe 8.5.3 von Seite 378

$f'' \leq 0 \quad g'' \leq 0$

Die Funktionen f und g seien beide zweimal differenzierbar und konkav.

$g' \geq 0$

Zeige: Wenn g monoton wachsend ist, dann ist die verkettete Funktion $g \circ f$ auch konkav.

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\big(g(f(x))\big)'' = \big(g'(f(x)) \cdot f'(x)\big)'$$

Produktregel: $$= \big(g'(f(x))\big)' \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x)$$

Kettenregel: $$= g''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x)$$

$$= \underbrace{g''(f(x))}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(f'(x))^2}_{\geq 0} + \underbrace{g'(f(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{f''(x)}_{\leq 0} \leq 0$$

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

$x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Sei f für alle x definiert durch

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$$

a) Bestimme die Stellen c, an denen $f'(c) = 0$ und bestimme die Intervalle, in denen f monoton wachsend ist.

b) Bestimme die Wendestelle für f.

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x \underbrace{-2}_{=q} = 0$

p-q-Formel

$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -2 \lor x_2 = 1$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

	$x=-3$	$x=-2$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
$\operatorname{sign}(f')$	>0	0	<0	0	>0

$f'(x)$ $3(-3)^2 + 3\cdot(-3) - 6$ $\quad 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 6 < 0$ $\quad 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 6$

$3\cdot 9 - 9 - 6$ $\quad 3\cdot 4 + 6 - 6 = 12 > 0$

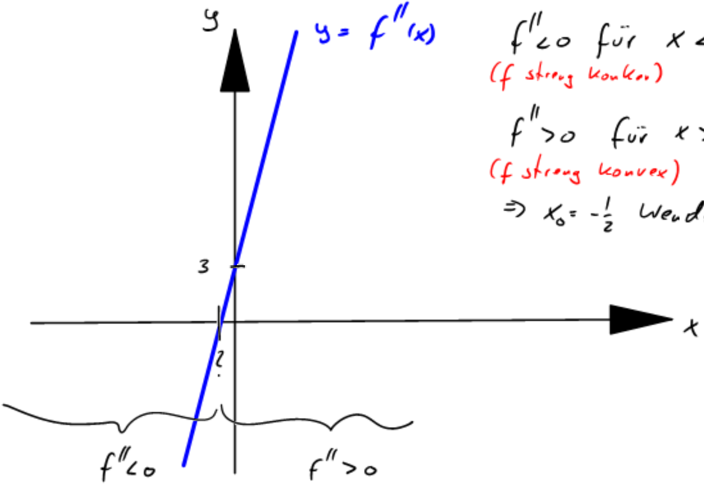
$27 - 15 = 12 > 0$

$\underbrace{f' \text{ ist nicht negativ}}$, falls $x \leq -2$ oder falls $x \geq 1$

$\Rightarrow f$ monoton wachsend.

b) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

$f''(x) = 6x + 3 = 0 \iff 6x = -3 \iff x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$



$f'' < 0$ für $x < -\frac{1}{2}$
(f streng konkav)

$f'' > 0$ für $x > -\frac{1}{2}$
(f streng konvex)

$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ Wendestelle

Wurzel & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ an, dass $x_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i \neq j$.

Begründe folgende Behauptung für $n = 2$:

Die Wurzel des arithmetischen Mittels der x_i ist größer als das arithmetische Mittel der Wurzel der x_i:

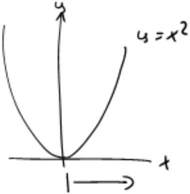
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

(Freiwillig: $n > 2$)

$\underline{\underline{n=2}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2} > \frac{1}{2}\sqrt{x_1} + \frac{1}{2}\sqrt{x_2}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2} > \tfrac{1}{2}\sqrt{x_1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x_2} \quad \Big|\, (\,)^2$$



$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 > \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x_2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}x_1 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{x_2} + \tfrac{1}{4}x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \tfrac{1}{4}x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1}\right)^2 - 2\,\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{x_2} + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x_2}\right)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x_1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{x_2}\right)^2 > 0 \qquad \text{da } x_1 \neq x_2$$

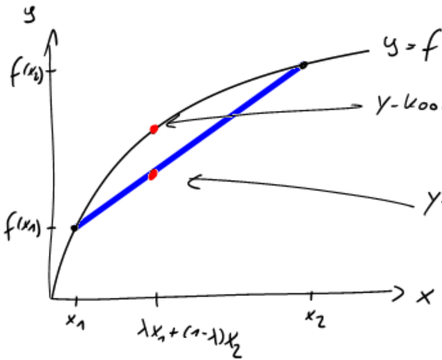
Kurzer Lösungsweg

$$\left(\sqrt{}\right)'' < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{} \text{ streng konkav}$$

$$\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2} > \lambda \sqrt{x_1} + (1-\lambda)\sqrt{x_2}$$

für $\lambda = \frac{1}{2}$

f konkav



y-Koordinate: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$

konkav $\geq$

$>$ strikt konkav

y-Koordinate: $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Falls f zweimal differenzierbar

$f''(x) \leq 0$ für alle x $\Leftrightarrow$ f konkav

$f''(x) < 0$ für alle x $\Rightarrow$ f strikt konkav

Mittlere quadratische Abweichung

Die mittlere quadratische Abweichung einer Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ ist üblicherweise in Bezug auf das arithmetische Mittel $\bar{x}$ dieser Stichprobe definiert.

Betrachte nun die mittlere quadratische Abweichung in Bezug auf eine beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$s^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda)^2$$

Ist s^2 strikt konkav, konkav, konvex oder strikt konvex in λ?

$$s^2(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (x_i - \lambda)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \lambda}{\sqrt{n}} \right)^2$$

$$= \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x_1 - \lambda}{\sqrt{n}}}}_{z_1} \Bigg)^2 + \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x_2 - \lambda}{\sqrt{n}}}}_{z_2} \Bigg)^2 + \cdots + \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x_n - \lambda}{\sqrt{n}}}}_{z_n} \Bigg)^2$$

Umbenennung

$\Rightarrow \quad s^2(\lambda) = f(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$

$f_1(z_1) = z_1^2$ ist streng konvex

$f_i(z_i) = z_i^2$ ist streng konvex

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i)$ streng konvex

Alternativer Lösungsweg (2. Ableitung)

$$s^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda)^2$$

äußere Fkt: $(\;)^2$

innere Fkt: $x_i - \lambda$

1. Ableitung:

$$\frac{d\, s^2(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{2(x_i - \lambda)}^{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda)$$

2. Ableitung:

$$\frac{d^2 s^2(\lambda)}{(d\lambda)^2} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1) = \frac{2}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} = \frac{2}{n}\cdot n = 2 > 0$$

Die 2. Ableitung von $S^2(\lambda)$ ist positiv

$\Rightarrow$ $s^2(\lambda)$ streng konvex.

Quadrat & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ an, dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Begründe folgende Behauptung für $n = 2$:

Das arithmetische Mittel der Quadrate der x_i ist größer als das Quadrat des arithmetischen Mittels der x_i:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

(Freiwillig: $n > 2$)

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > \left(\overbrace{\frac{1}{2}x_1}^{a} + \overbrace{\frac{1}{2}x_2}^{b}\right)^2$$

$$= \overbrace{\frac{1}{4}x_1^2}^{a^2} + 2\cdot\overbrace{\frac{1}{2}x_1}^{a}\cdot\overbrace{\frac{1}{2}x_2}^{b} + \overbrace{\frac{1}{4}x_2^2}^{b^2} \qquad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_2^2 > x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 > 0$ für alle $x_1 \neq x_2$ ✓

Alternativer Lösungsweg

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$

$\Rightarrow f$ streng konvex

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) > f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$

für alle $0 < \lambda < 1$

für $\lambda = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 > \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2\right)^2$