Übung U08 zu Kapitel 8:[1]

Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

8.2 Definitionen
Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

8.5 Tests der ersten Ableitung
Aufgabe 8.3.3 von Seite 378

8.6 Wendestellen
Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

Wurzel & arithmetisches Mittel

Mittlere quadratische Abweichung

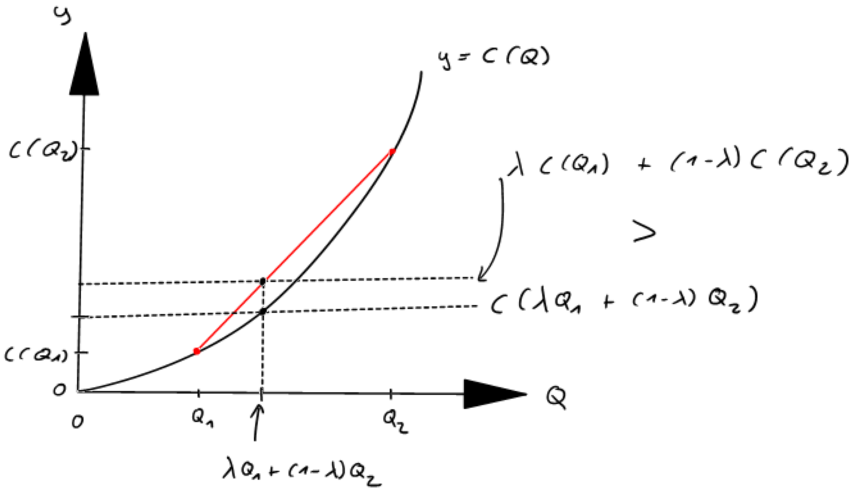
Quadrat & arithmetisches Mittel

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365

Nehme an, dass ein Unternehmen Kosten für die Produktion von $Q \geq 0$ Einheiten ihres Produkts hat, gegeben durch die strikt konvexe Funktion $c : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$, wobei $c(0) = 0$.

Nehme auch an, dass das Unternehmen die Möglichkeit hat, einen zweiten Betrieb zu eröffnen mit derselben Kostenfunktion und dann einen Teil seiner Produktion in dem zweiten Betrieb herzustellen.

Sollte es das tun?



Zu produzierende Gesamtmenge Q

Fall $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$

$$\lambda \cdot \underbrace{c(0)}_{=0} + (1-\lambda)\, c(Q) > c(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)\, c(Q) > c((1-\lambda) Q)$$

Fall $Q_1 = Q$, $Q_2 = 0$

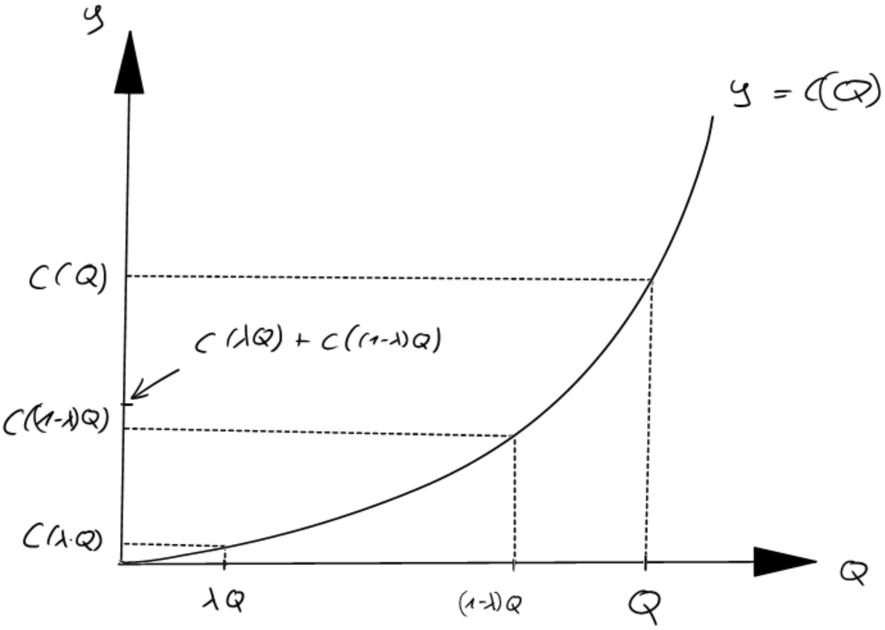
$$\lambda \cdot c(Q) + (1-\lambda) \underbrace{c(0)}_{=0} > c(\lambda \cdot Q + (1-\lambda) \cdot 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\, c(Q) > c(\lambda \cdot Q)$$

$$\underbrace{(1-\lambda)\, c(Q) + \lambda\, c(Q)} > c((1-\lambda) Q) + c(\lambda Q)$$

$$c(Q) > c((1-\lambda) Q) + c(\lambda Q)$$

Produktion in nur einem Betrieb — Produktion in zwei Betrieben



y
$y = C(Q)$
$C(Q)$
$C(\lambda Q) + C((1-\lambda)Q)$
$C((1-\lambda)Q)$
$C(\lambda \cdot Q)$
λQ
$(1-\lambda)Q$
Q
Q

Aufgabe 8.3.3 von Seite 378

Die Funktionen f und g seien beide zweimal differenzierbar und konkav.

Zeige: Wenn g monoton wachsend ist, dann ist die verkettete Funktion $g \circ f$ auch konkav.

$$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))\, f'(x)$$

$$\left[g(f(x))\right]'' = \left[g'(f(x)) \cdot f'(x)\right]'$$

Produktregel

$$= [g'(f(x))]' f'(x) + g'(f(x)) f''(x)$$

Kettenregel

$$= \underbrace{g''(f(x))}_{\leq 0} \cdot \underbrace{f'(x) \cdot f'(x)}_{\geq 0} + \underbrace{g'(f(x))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{f''(x)}_{\leq 0}$$

(g konkav) (Quadrat) (g monoton wachsend) (f konkav)

≤ 0

$\Rightarrow \quad g(f(x))$ konkav

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}x - 6 = 3x^2 + 3x - 6$

$3x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 1x^2 + \underset{p}{1x} \underset{q}{-2} = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Sei f für alle x definiert durch

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$$

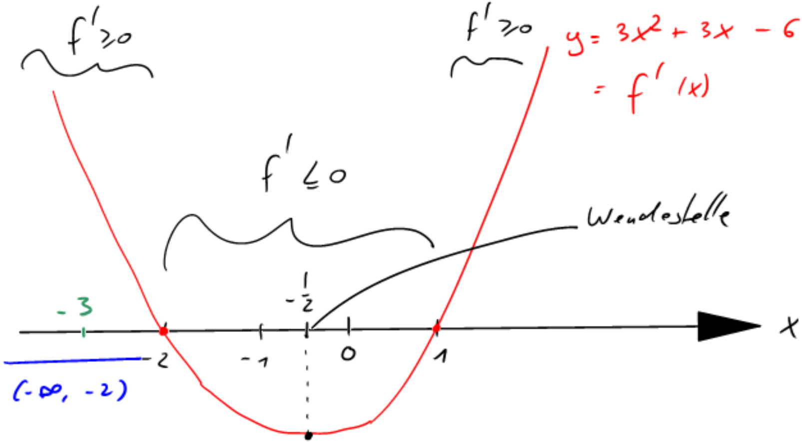
a) Bestimme die Stellen c, an denen $f'(c) = 0$ und bestimme die Intervalle, in denen f monoton wachsend ist.

b) Bestimme die Wendestelle für f.

p-q-Formel

$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$



a) $f'(-2) = 0$, $f'(1) = 0$

f ist monoton wachsend, falls $f' \geq 0$

$\iff x \leq -2$ oder $x \geq 1$

b) zweite Ableitung: $f''(x)$

$$[3x^2 + 3x - 6]' = 2 \cdot 3 \cdot x + 3 = 6x + 3$$

Wendestelle:

$f''(x) = 0$: $\quad 6x + 3 = 0 \iff 6x = -3$

$$\iff x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Wurzel & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ an, dass $x_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i \neq j$.

Behauptung: Die Wurzel des arithmetischen Mittels der Beobachtungen x_i ist größer als das arithmetische Mittel der Wurzel der Beobachtungen x_i:

$$\sqrt{\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{x}}} > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$$

a) Begründe die Behauptung für $n = 2$

b) Benutze die vollständige Induktion, um die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. (Schwer, nicht relevant für die Klausur.)

a) $\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right) \quad \Big|\ (\ )^2$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) > \frac{1}{4}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_1 + 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + x_2\right)$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{4}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} - \frac{1}{4}x_2 > 0$$

$$\frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{4}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \frac{1}{4}x_2 > 0 \qquad \Big|\cdot 4$$

$\sqrt{x_1}^2$ $\quad$ $\sqrt{x_2}^2$

$$x_1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2 > 0$$

2. Binomische Formel

$$\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \neq x_2 \quad \checkmark$$

b) Behauptung für $n=2$ gezeigt in a)

zu Zeigen

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i} > \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{x_i}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i} = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n+1}x_{n+1}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{=\lambda}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{x}_n} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{=1-\lambda}x_{n+1}} > \frac{n}{n+1}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{>\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}} + \frac{1}{n+1}\sqrt{x_{n+1}}$$

$\sqrt{}$ Konkav oder Konvex?

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{n+1}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} + \frac{1}{n+1}\sqrt{x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{x_i}$$

$$\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{1}} = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{4}}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}}_{>0,\ \text{falls } x>0}}_{<0} = \left(\sqrt{x}\right)''$$

$\Rightarrow$ Wurzel ist strikt konkav

Mittlere quadratische Abweichung

Die mittlere quadratische Abweichung einer Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ ist üblicherweise in Bezug auf das arithmetische Mittel $\bar{x}$ dieser Stichprobe definiert.

Betrachte nun die mittlere quadratische Abweichung in Bezug auf eine beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$s^2(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\lambda + \lambda^2)$$

Ist s^2 strikt konkav, konkav, konvex oder strikt konvex in λ?

$$s^2(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda)^2$$

$$[s^2(\lambda)]' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \lambda)(-1) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\lambda - x_i)$$

$$[s^2(\lambda)]'' = \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\lambda - x_i) \right]' = \frac{2}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} = \frac{2}{n} \cdot n = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ $s^2(\lambda)$ strikt konvex

Quadrat & arithmetisches Mittel

Nehme für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ an, dass $x_i \neq x_j$ für mindestens ein Paar $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Behauptung: Das arithmetische Mittel der Quadrate der Beobachtungen x_i ist größer als das Quadrat des arithmetischen Mittels der Beobachtungen x_i:

$$\overline{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \bar{x}\bar{x}$$

a) Begründe die Behauptung für $n = 2$

b) Zeige die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. (Schwer, nicht relevant für die Klausur.)

a) $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > \left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^2$

$= \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2$

$= \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{2}{4}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_2^2 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{2}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 > 0$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0$

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2$

b) zu Zeigen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$0 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - \bar{x})^2}_{>0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

da zwei x_i, x_j unterschiedlich sind

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}_{n\cdot\bar{x}^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\cdot\bar{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{x}} + \cancel{\frac{1}{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\cdot\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}\cdot\bar{x}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; > \; \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$