Übung U07b zu Kapitel 7:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1]Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

7.7 Elastizitäten

Aufgabe 7.7.4 von Seite 317
Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

7.8 Stetigkeit

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 303

Klausuraufgaben

Aufgabe 5 HT 2023
Aufgabe 3 HT 2024
Aufgabe 5 NT 2023

Aufgabe 7.7.4 von Seite 317

Verwende die Definition der Elastizität um diese für folgende Funktionen zu bestimmen, wobei a und p Konstanten sind:

a) $f(x) = e^{ax}$

b) $g(x) = \ln(x)$

c) $h(x) = x^p e^{ax}$

d) $k(x) = x^p \ln(x)$

Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

Es seien f und g differenzierbare Funktionen von x mit positiven Funktionswerten.

Zeige, dass:

b) Die Elastizität des Produkts $f \cdot g$ ist die Summe der Elastizitäten von f und g.

c) Die Elastizität des Quotienten von $\frac{f}{g}$ ist die Differenz der Elastizitäten von f und g.

f) Die Elastizität der Verkettung $f \circ g$ ist das Produkt der Elastizitäten von f und g.

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 303

Seien f und g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{für } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{für } x \leq 2 \\ -x + 6, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeichne von jeder Funktion den Graphen.

Ist f stetig an der Stelle $x = 0$?

Ist g stetig an der Stelle $x = 2$?

Aufgabe 5 HT 2023

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -(x + 1)(x - 1)$$

Wie lautet die Elastizität dieser Funktion an der Stelle $x_0 = 0$?

Hinweis: $El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$

a) $El_x f(x_0) = 1/2$

b) $El_x f(x_0) = -1/2$

c) $El_x f(x_0) = 0$

d) $El_x f(x_0) = 1$

Aufgabe 3 HT 2024 (bereits in U07a)

Für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ mit $x > 0$ gilt:

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \text{ für alle } x > 0$$

$$\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\ln(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = e$

b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x}$

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}$ existiert nicht.

Aufgabe 5 NT 2023

Hinweise:

Ableitung nach dem Exponenten:

$$\frac{da^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x \text{ für } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

Regel von l'Hôpital:

Falls $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g differenzierbar an der Stelle x_0 und $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Aufgabe 5 NT 2023

Frage:

Wie lautet der Grenzwert des Bruchs

$$\frac{2^x - 3^x}{e^{2x} - e^{3x}}$$

für $x \to 0$?

a) Dieser Grenzwert existiert nicht.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{e^{2x} - e^{3x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{e^{2x} - e^{3x}} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{e^{2x} - e^{3x}} = \ln(3) - \ln(2)$