Übung 2 zu Kapitel 7:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

7.7 Elastizitäten

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317
Aufgabe 7.7.4 von Seite 317
Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

7.8 Stetigkeit

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 325
Aufgabe 7.8.5 auf Seite 325

7.12 Regel von L'Hôpital

Aufgabe 7.12.3 auf Seite 348

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317

$El_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

Bestimme die Elastizitäten der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen:

a) $3x^{-3}$ $\rightsquigarrow El = -3$

b) $-100x^{100}$

c) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

d) $A/x\sqrt{x}$

b) $f(x) = -100x^{100}$

$f'(x) = 100 \cdot (-100x^{99})$

$= -10.000x^{99}$

$El_x f(x) = -10.000x^{99} \cdot \frac{x}{-100x^{100}}$

$x^{99} \cdot x^1 = x^{99+1} = x^{100}$

$= \frac{-10.000 \cdot \cancel{x^{100}}}{-100 \cdot \cancel{x^{100}}} = 100$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$El_x f(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}}{\cancel{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2}\frac{x}{x} = \frac{1}{2}$

$f(x) = \sqrt{x}$

relative Änderung des Funktionswertes

für $x=100$

$$\boxed{\frac{f(101) - f(100)}{f(100)}} = \frac{\sqrt{101} - \sqrt{100}}{\sqrt{100}} = \frac{10{,}049 - 10}{10}$$

$$= \frac{0{,}049}{10} = 0.0049 \approx 0.005$$

$$= 0{,}5\,\%$$

1%-Erhöhung von x: $x=100 \rightsquigarrow x=101$

$p\,\% : \frac{p}{100}$

$p \cdot 100\,\% = \frac{p \cdot 100}{100} = p$

d) $f(x) = A / \underbrace{x\sqrt{x}}_{g(x)}$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$f'(x) = (A)' = 0$$

$$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{0 \cdot x\sqrt{x} - A \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x})^2}$$

$$= -A\,\frac{3}{2}\,\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x^2 \cdot \cancel{x}\sqrt{x}}$$

$$= -A\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$El(x) = -\cancel{A}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\cancel{A}/x\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \cdot \overbrace{x \cdot x}^{x^2}\sqrt{x} = -\frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\frac{x}{1/x\sqrt{x}} = x : \frac{1}{x\cdot\sqrt{x}} = x \cdot x \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{m}{a/b} = m : \frac{a}{b} = m \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{A}{x\sqrt{x}} = A \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} = A\left(x \cdot \sqrt{x}\right)^{-1}$$

$$= A\left(x^{1} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = A\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

$$= A\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} = A\, x^{\frac{3}{2}\cdot(-1)} = A\, x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\leadsto \quad El_{(x)} = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 7.7.4 von Seite 317

$(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Verwende die Definition der Elastizität um diese für folgende Funktionen zu bestimmen, wobei a und p Konstanten sind:

a) $\boxed{f(x) = e^{ax}}$

b) $\boxed{g(x) = \ln(x)}$

c) $\boxed{h(x) = x^p e^{ax}}$

d) $k(x) = x^p \ln(x)$

$f'(x) = \underbrace{a}_{\text{innere Ableitung}} \underbrace{e^{ax}}_{\text{äußere Ableitung}}$

$El_x f(x) = a \cdot \cancel{e^{ax}} \cdot \frac{x}{\cancel{e^{ax}}} = a \cdot x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$El_x g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$

$$h(x) = \underbrace{x^p}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{g(x)}$$

$h'(x)$ Produktregel: $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

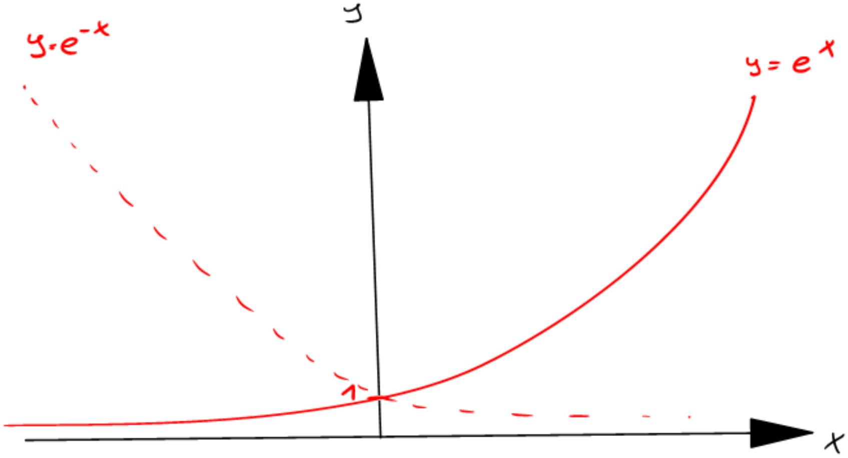
$$= p\,x^{p-1} \cdot e^{ax} + x^p \cdot a\,e^{ax}$$

$$El_x h(x) = h'(x) \cdot \frac{x}{h(x)} = \left(p\,x^{p-1} e^{ax} + x^p a\, e^{ax}\right) \cdot \frac{x}{x^p \cdot e^{ax}}$$

$$= \left(p\,x^{p-1} + x^p a\right) \frac{\cancel{e^{ax}} \cdot x}{x^p \cdot \cancel{e^{ax}}}$$

$$= \left(p + x \cdot a\right) \frac{x^{p-1} \cdot x}{x^p} = (p + x \cdot a) \frac{\cancel{x^p}}{\cancel{x^p}}$$

$$= p + ax$$



y
$y = e^{-x}$
$y = e^{x}$
1
x

$$K(x) = x^p \cdot \ln(x)$$

$$K'(x) = p\,x^{p-1} \cdot \ln(x) + x^p \cdot \frac{1}{x}$$

$$K'(x) \cdot \frac{x}{K(x)} = \Big(p\,\underline{x^{p-1}} \cdot \ln(x) + \underbrace{x^p \cdot \frac{1}{x}}_{\substack{x^p \cdot x^{-1} \\ = \underline{x^{p-1}}}} \Big) \cdot \frac{x}{x^p \cdot \ln(x)}$$

$$= \left(p \cdot \ln(x) + 1\right) \frac{x^{p-1} \cdot x^1}{x^p \cdot \ln(x)}$$

$$= \left(p \cdot \ln(x) + 1\right) \frac{\cancel{x^p}}{\cancel{x^p} \cdot \ln(x)}$$

$$= p + \frac{1}{\ln(x)}$$

Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

Es seien f und g differenzierbare Funktionen von x mit positiven Funktionswerten.

Zeige, dass:

b) Die Elastizität des Produkts $f \cdot g$ ist die Summe der Elastizitäten von f und g. siehe Vorlesung 2 (letzte Minuten)

c) Die Elastizität des Quotienten von $\frac{f}{g}$ ist die Differenz der Elastizitäten von f und g.

f) Die Elastizität der Verkettung $f \circ g$ ist das Produkt der Elastizitäten von f und g.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot \frac{x}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot x \cdot \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^{\cancel{2}}} \cdot x \cdot \frac{\cancel{g(x)}}{f(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x)\cdot \underline{x} - f(x)\cdot g'(x)\cdot \underline{x}}{g(x)\cdot f(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\,\cancel{g(x)}\cdot x}{\cancel{g(x)}\cdot f(x)} - \frac{\cancel{f(x)}\cdot g'(x)\cdot x}{g(x)\cdot \cancel{f(x)}}$$

$$= f'(x)\cdot \frac{x}{f(x)} - g'(x)\cdot \frac{x}{g(x)}$$

$$\frac{m}{n}\cdot a = \frac{m\cdot a}{n}$$

$$(f \circ g) = f(g(x))$$

kettenregel

$$(f \circ g)' = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$El_x f(g(x)) = \left(f(g(x))\right)' \cdot \frac{x}{f(g(x))}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{f(g(x))}$$

$$= f'(g(x)) \cdot \frac{g(x)}{f(g(x))} \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)} = El_x f(x) \cdot El_x g(x)$$

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 325

Seien f und g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{für } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

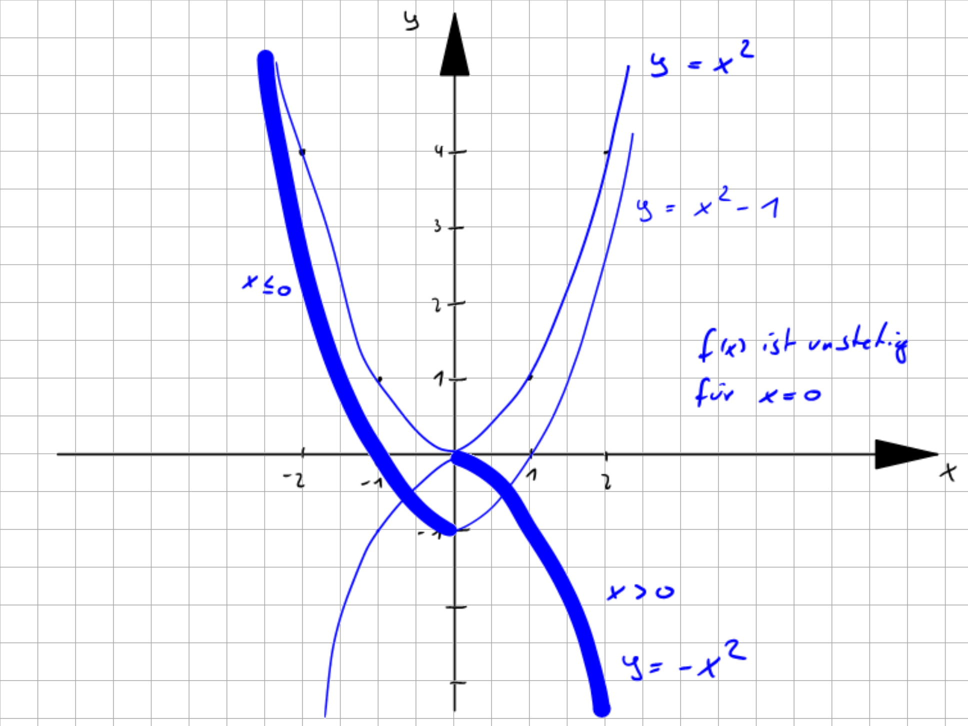
und

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{für } x \leq 2 \\ -x + 6, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeichne von jeder Funktion den Graphen.

Ist f stetig an der Stelle $x = 0$?

Ist g stetig an der Stelle $x = 2$?


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-1
1
2
y = x^2
y = x^2 - 1
x ≤ 0
f(x) ist unstetig
für x = 0
x > 0
y = -x^2

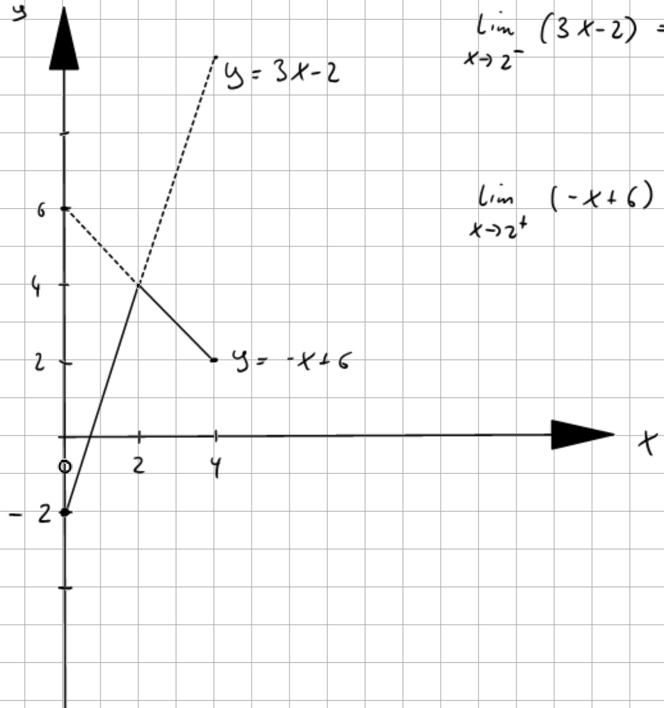
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \leq 0 \\ -x^2 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} -x^2 = -\lim_{x \to 0^+} x^2 = -\left(\lim_{x \to 0^+} x\right)^2 = -(0)^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 - 1 = \left(\lim_{x \to 0^-} x^2\right) - 1 = \left(\lim_{x \to 0^-} x\right)^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$$

wegen $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ ist f nicht

stetig für $x = 0$.



$$\lim_{x \to 2^-} (3x - 2) = 3\left(\lim_{x \to 2^-} x\right) - 2$$

$$= 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} (-x + 6) = -\left(\lim_{x \to 2^+} x\right) + 6$$

$$= -2 + 6 = 4$$

Aufgabe 7.8.5 auf Seite 325

Für welche Werte von a ist die folgende Funktion stetig für alle x?

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{, für } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{, für } x > 1 \end{cases}$$

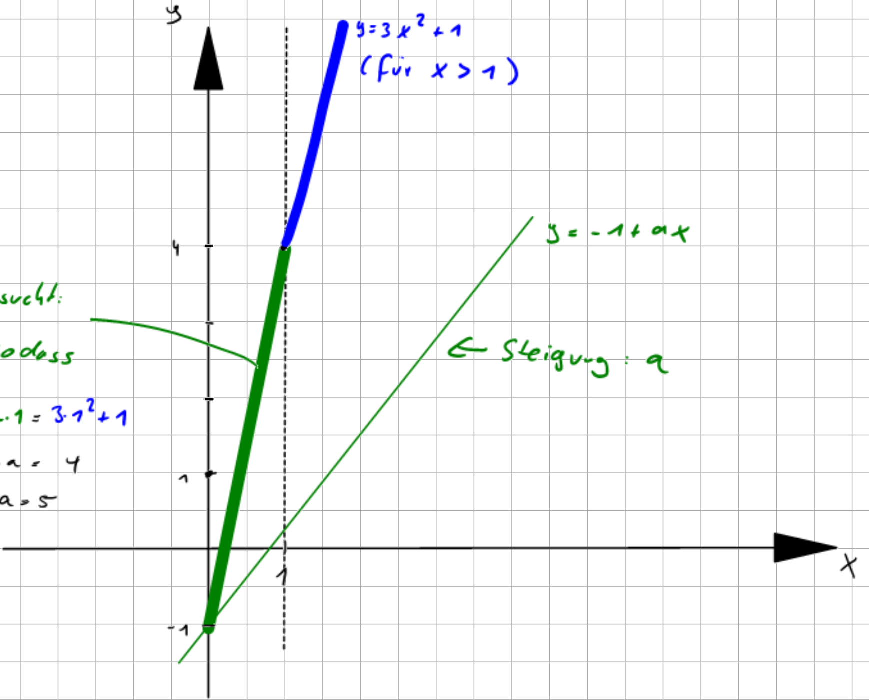
gesucht:

a sodass

$$-1 + a \cdot 1 = 3 \cdot 1^2 + 1$$

$$-1 + a = 4$$

$$a = 5$$



Aufgabe 7.12.3 auf Seite 348

Verwende die Regel von L'Hôpital, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)$

falls $f(x_0)=0$ und $g(x_0)=0$

und falls f und g differenzierbar für $x=x_0$

und falls $g'(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

a) $\frac{x-1}{x^2-1}$

$f(x) = x-1$

$g(x) = x^2-1$

$x_0 = 1$

$f(x_0) = 1-1 = 0$ ✓

$g(x_0) = 1^2-1 = 0$ ✓

$f'(x) = 1$

$\Rightarrow f'(x_0) = 1 \neq 0$ ✓

$g'(x) = 2x$

$g'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2 \neq$ ✓

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{1}{2}$$

3. Binomische Formel

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

d) $\dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$

$x_0 = 1$

$f(x) = \ln(x) - x + 1$

$f(x_0) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 + 1 = 0$ ✓

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$f'(x_0) = \frac{1}{1} - 1 = 0$

$g(x) = (x-1)^2$

$g(x_0) = (1-1)^2 = 0$ ✓

$g'(x) = 2(x-1)$

$g'(x_0) = 2(1-1) = 0$!

$\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}$ f' g'

$f''(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)' = (x^{-1} - 1)'$

$= -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f''(x_0) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$g''(x) = 2$

$g''(x_0) = 2 \neq 0$ ✓

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{f''(1)}{g''(1)} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

e) $\frac{1}{x-1} \cdot \ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right) = \frac{\ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)}{x-1}$

$x_0 = 1$

$f(x_0) = \ln\left(\frac{7 \cdot 1 + 1}{4 \cdot 1 + 4}\right) = \ln\left(\frac{8}{8}\right) = \ln(1) = 0$ ✓

$g(x_0) = 1 - 1 = 0$ ✓

äußere Ableitung innere Ableitung

$f'(x) = \frac{1}{\frac{7x+1}{4x+4}} \cdot \frac{7 \cdot (4x+4) - (7x+1) \cdot 4}{(4x+4)^2}$

$= \frac{\cancel{4x+4}}{7x+1} \cdot \frac{\cancel{28x} + 28 \cancel{-28x} - 4}{(4x+4)^{\cancel{2}}}$

$= \frac{24}{(7x+1)(4x+4)}$

$f'(1) = \frac{24}{8 \cdot 8} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

$g'(x) = 1$

$g'(x_0) = 1$

$\frac{1}{x-1} \ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right) \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{\frac{3}{8}}{1} = \frac{3}{8}$