Übung 1 zu Kapitel 7:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

7.1 Implizites Differenzieren

Aufgabe 7.1.4 von Seite 291
Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

7.4 Lineare Approximation

Aufgabe 7.4.1 von Seite 304
Aufgabe 7.4.5 von Seite 304
Aufgabe 7.4.9 von Seite 305

7.7 Elastizitäten

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317

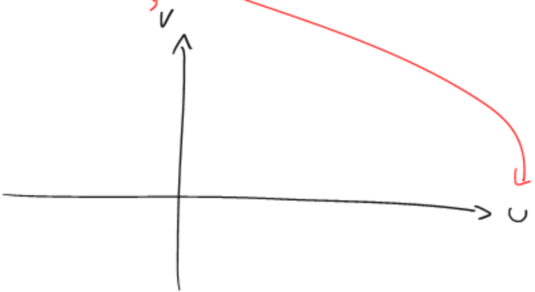
Aufgabe 7.1.4 von Seite 291

Eine Kurve in der uv-Ebene sei gegeben durch:

$$u^2 + uv - v^3 = 0$$

Berechne dv/du durch implizites Differenzieren.

Bestimme den Punkt (u, v) auf der Kurve, in dem $dv/du = 0$ und $u \neq 0$ ist.



$$u^2 + u\,v(u) - (v(u))^3 = 0 \qquad v'(u) = \frac{dv(u)}{du}$$

Produktregel — Kettenregel

$$\frac{d}{du}:\quad 2u + 1\,v(u) + u\cdot v'(u) - \underbrace{3(v(u))^2}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(u)}_{\text{innere Ableitung}} = 0$$

$$2u + v + u\cdot v' - 3v^2\cdot v' = 0 \qquad \big|\ -2u - v$$

$$\Leftrightarrow (u-3v^2)\,v' = u\cdot v' - 3v^2 v' = -2u - v \qquad \big|\ :(u-3v^2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v' = -\frac{2u+v}{u-3v^2}} = 0 \Leftrightarrow 2u + v = 0 \Leftrightarrow \boxed{v = -2u}$$

$$\Leftrightarrow v' = 0$$

Produktregel

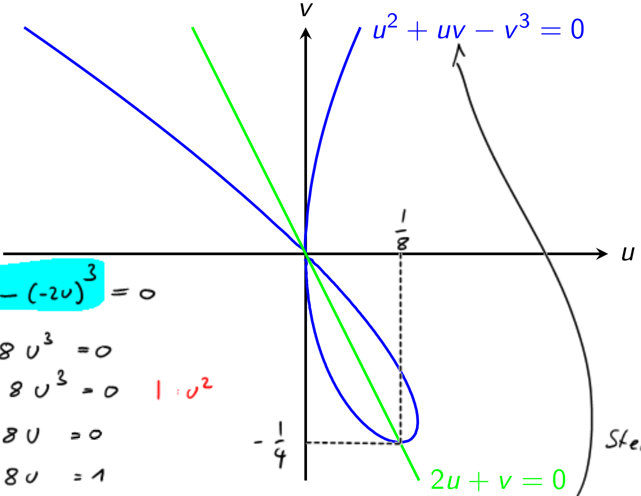
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Kettenregel

$$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Graph zu Aufgabe 7.1.4

$$-(-2u)^3 = -(-2)^3 \cdot u^3 = -(-8)\cdot u^3 = 8\cdot u^3$$



$$u^2 + u(-2u) - (-2u)^3 = 0$$
$$u^2 - 2u^2 + 8u^3 = 0$$
$$-u^2 + 8u^3 = 0 \quad | :u^2$$
$$-1 + 8u = 0$$
$$8u = 1$$
$$u = \frac{1}{8}$$

Steigung $v' = 0$

$\Leftrightarrow v = -2u$

$u = \frac{1}{8} \Rightarrow v = -2\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$

Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

Die auf der Abbildung der nächsten Folie gezeigte elegante Kurve ist als *Lemniskate* bekannt (Bernoulli 1667-1748). Dieser Graph wird durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

bestimmt, wobei a eine positive Konstante ist.

a) Bestimme die Steigung der Tangente an diese Kurve in einem Punkt (x, y), in dem $y \neq 0$ ist.

b) Bestimme diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente parallel zur x-Achse ist.

$$(x^2 + y(x)^2)^2 = a^2(x^2 - y(x)^2)$$

Kettenregel Kettenregel

$$\frac{d}{dx}: \underbrace{2(x^2+y^2)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot (2x + 2y \cdot y') = a^2(2x - 2y \cdot y')$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)\cdot\cancel{2}x + 2(x^2+y^2)\cdot\cancel{2}\cdot y \cdot y' = a^2\cancel{2}x - a^2\cancel{2}y\,y' \qquad |:2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)x + 2(x^2+y^2)y\cdot y' = a^2x - a^2 y\,y'$$

$$\Leftrightarrow a^2 y\,y' + 2(x^2+y^2)\,y\cdot y' = a^2 x - 2(x^2+y^2)x$$

$$\Leftrightarrow y' \cdot y[a^2 + 2(x^2+y^2)] = [a^2 - 2(x^2+y^2)]x$$

äußere Fkt. $(\ )^2$

innere Fkt. $y(x)$

$$\Leftrightarrow \boxed{y' = \frac{x}{y}\,\frac{a^2 - 2(x^2+y^2)}{a^2 + 2(x^2+y^2)}}$$

$$=0 \Leftrightarrow a^2 - 2(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (x^2+y^2)$$

$$\left(x^2 + \overbrace{y(x)^2}\right)' = 2x + \underbrace{2\cdot y(x)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{y'(x)}_{\text{innere Abl.}}$$

innere Abl.

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

$$\boxed{\frac{a^2}{2} = (x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{\cancel{4}2}}{4} = \cancel{a^2}(x^2-y^2) \quad | : a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = x^2-y^2$$

$$\frac{a^2}{2} = x^2+y^2$$

$$\Sigma \quad \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2} = x^2+x^2-y^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{8}a^2 = x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{8}a^2} \vee x = -\sqrt{\frac{3}{8}a^2}$$

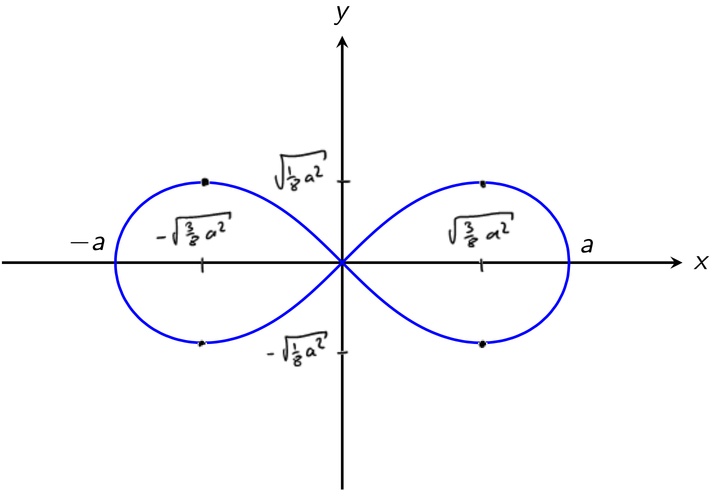
"oder"

$$\frac{a^2}{2} = \frac{3}{8}a^2 + y^2 \quad \Big| -\frac{3}{8}a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}a^2 = y^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{8}a^2} \vee y = -\sqrt{\frac{1}{8}a^2}$$

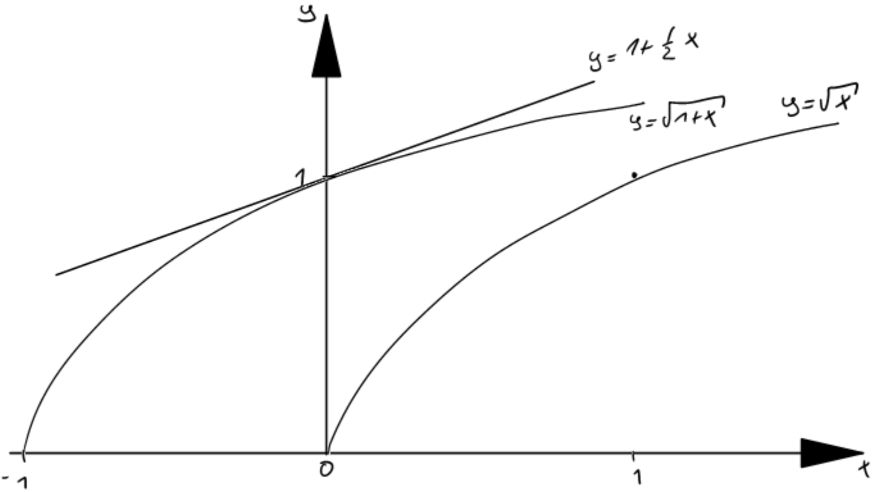
Eine Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$



Aufgabe 7.4.1 von Seite 304

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Zeige, dass $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für x nahe 0 und illustriere diese Approximation.



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

hier $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad , \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+0} + \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x$$

Aufgabe 7.4.5 von Seite 304

$dy = f'(x) \cdot dx$

Seien p, q und r Konstanten. Bestimme die folgenden Differentiale:

a) $d(10x^3) = \overbrace{30x^2}^{f'} \cdot dx$

b) $d(5x^3 - 5x^2 + 5x + 5) = (15x^2 - 10x + 5)dx$

c) $d(1/x^3) = d(x^{-3}) = -3x^{-4} \cdot dx = -3\frac{1}{x^4} \cdot dx$

d) $d(\ln(x)) = \frac{1}{x} \cdot dx$

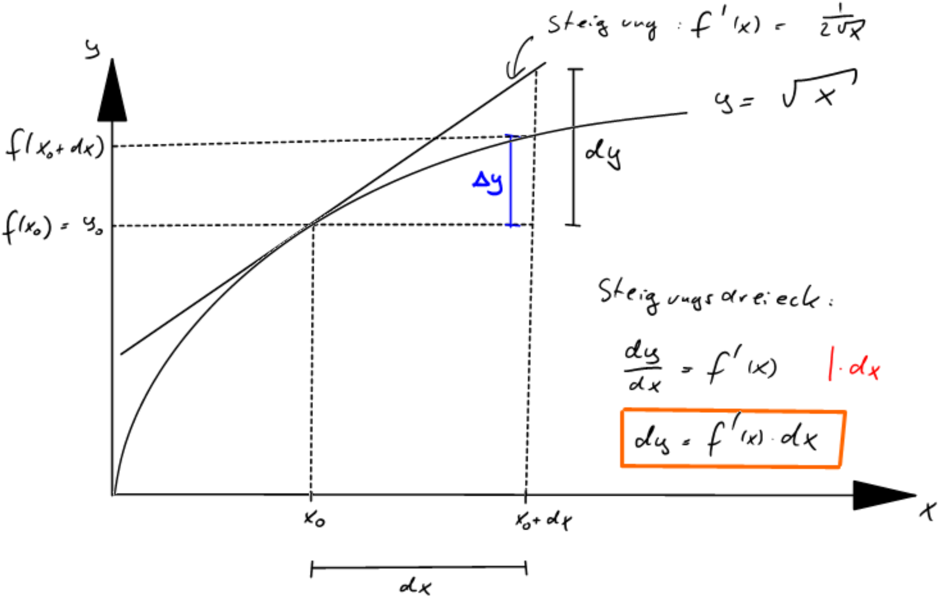
e) $d(x^p + x^q) = (px^{p-1} + qx^{q-1}) \cdot dx$

f) $d(x^p x^q) = d(x^{p+q}) = (p+q)x^{(p+q-1)} \cdot dx$

g) $d(px+q)^r = \underbrace{r(px+q)^{r-1}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{p}_{\text{innere Abl.}} \cdot dx$

h) $d(e^{px} + e^{qx}) = (pe^{px} + qe^{qx})dx$

äußere Fkt. $(\,)^r$
innere Fkt. $px+q$



Steigungsdreieck:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad | \cdot dx$$

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Aufgabe 7.4.9 von Seite 305

$F''(r) = 2\pi$

Ein Kreis mit Radius r hat:

die Fläche $F(r) = \pi r^2$

den Umfang $F'(r) = 2\pi r$

$\Delta y \approx dy = F'(r) \cdot dr$

a) Erkläre die Approximation $\underbrace{F(r+dr) - F(r)}_{\Delta y \approx dy = F'(r)\cdot dr} \approx 2\pi r dr$ geometrisch.

b) Ist $F(r+dr)$ ~~kleiner~~ oder größer ✓ als $\underbrace{F(r) + \overbrace{2\pi r}^{F'(r)} dr}_{\text{Lineare Approximation}}$?

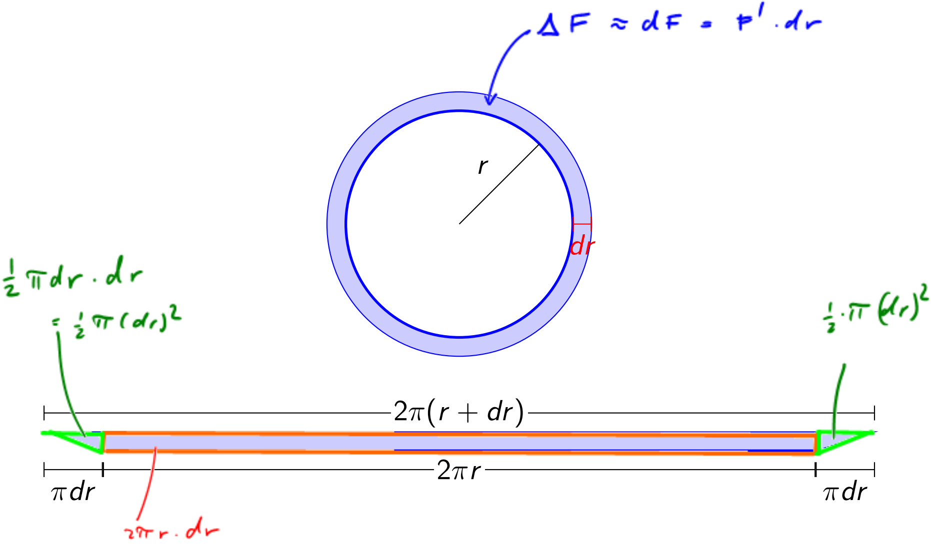
$$F(\underbrace{r+dr}_{x}) \approx F(\underbrace{r}_{x_0}) + F'(r)(\underbrace{r+dr}_{x} - \underbrace{r}_{x_0})$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quadratische Approximation

$$F(r+dr) \approx F(r) + F'(r)\,dr + \frac{1}{2} F''(r) \cdot (dr)^2$$

$$= F(r) + 2\pi r\,dr + \frac{1}{2} \underbrace{2\pi}_{>0} \cdot \underbrace{(dr)^2}_{>0}$$


$\Delta F \approx dF = F' \cdot dr$
r
dr
$\frac{1}{2}\pi dr \cdot dr$
$= \frac{1}{2}\pi (dr)^2$
$\frac{1}{2} \cdot \pi (dr)^2$
$2\pi(r + dr)$
$2\pi r$
πdr
πdr
$2\pi r \cdot dr$

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317

$El_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

Bestimme die Elastizitäten der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen:

a) $3x^{-3}$

b) $-100x^{100}$

c) $\sqrt{x}$

d) $A/x\sqrt{x}$

$f(x) = 3x^{-3}$, $f'(x) = -9x^{-4}$

$$El_x f(x) = -9x^{-4} \cdot \frac{x}{3 \cdot x^{-3}}$$

$$= -9x^{-4} \cdot x \frac{1}{3x^{-3}}$$

$$= -9x^{-3} \cdot \frac{1}{3x^{-3}}$$

$$= -9 \cdot \frac{1}{3} = -3$$