Übung U07a zu Kapitel 7:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

7.1 Implizites Differenzieren

Aufgabe 7.1.4 von Seite 291
Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

7.4 Lineare Approximation

Aufgabe 7.4.9 von Seite 284

Klausuraufgaben

Aufgabe 3 HT 2024
Aufgabe 2 NT 2024
Aufgabe 3 NT 2024

Aufgabe 7.1.4 von Seite 291

V ist eine Funktion von U
→ "V(U)"

$U^2 + \underbrace{U \cdot V(U)} - \underbrace{(V(U))^3} = 0$

Kettenregel

$2U + \underbrace{1 \cdot V(U) + U \cdot V'(U)}_{\text{Produktregel}} - \underbrace{3(V(U))^2}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{V'(U)}_{\text{innere}} = 0 \quad \Big| -2U - V$

Ableitung

Eine Kurve in der uv-Ebene sei gegeben durch:

$$u^2 + uv - v^3 = 0$$

Berechne dv/du durch implizites Differenzieren.

Bestimme den Punkt (u, v) auf der Kurve, in dem $dv/du = 0$ und $u \neq 0$ ist.

$U \cdot V' - 3V^2 \cdot V' = -2U - V$

$\Leftrightarrow V'(U - 3V^2) = -(2U + V)$ falls $U - 3V^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{V' = -\dfrac{2U + V}{U - 3V^2}} = 0 \Leftrightarrow 2U + V = 0$

$\Leftrightarrow V = -2U$

Graph zu Aufgabe 7.1.4

$$u^2 + u\cdot(-2u) - (-2u)^3 = 0$$
$$\iff u^2 - 2u^2 + 8u^3 = 0$$
$$\iff -u^2 + 8u^3 = 0 \quad : u^2$$
$$-1 + 8u = 0$$

$$u^2(-1 + 8\cdot u) = 0$$

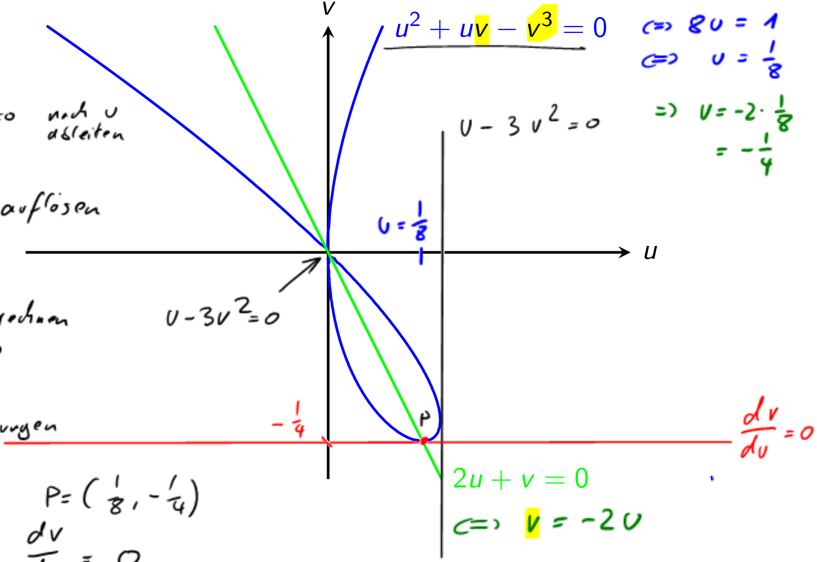
$$\iff 8u = 1$$
$$\iff u = \frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow v = -2\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$

Schritt 1:
$u^2 + uv - v^3 = 0$ nach u ableiten

Schritt 2:
nach v' auflösen

Schritt 3:
$v' = 0$ ausrechnen
$\rightarrow 2u + v = 0$

Schritt 4:
Beide Gleichungen nach u & v auflösen



$P = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$

$\frac{dv}{du} = 0$

Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

Die auf der Abbildung der nächsten Folie gezeigte elegante Kurve ist als *Lemniskate* bekannt (Bernoulli 1667-1748). Dieser Graph wird durch die Gleichung

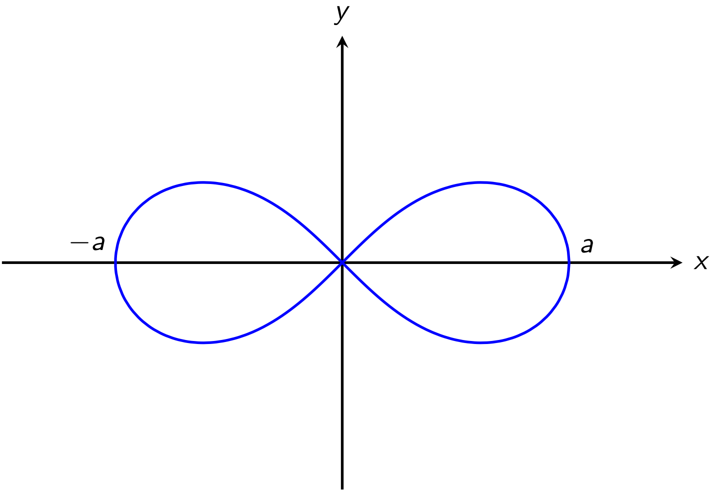
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

bestimmt, wobei a eine positive Konstante ist.

a) Bestimme die Steigung der Tangente an diese Kurve in einem Punkt (x, y), in dem $y \neq 0$ ist.

b) Bestimme diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente parallel zur x-Achse ist.

Eine Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$



leite $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

nach x ab & betrachte y als Funktion von x.

Linke Seite:

innere Funktion x^2+y^2

äußere Funktion $(\ )^2$

äußere Ableitung $2\cdot(\ )$

innere Ableitung $2x + 2y\cdot y'$

rechte Seite

Ableitung:

$a^2(2x-2y\cdot y')$

$\Rightarrow$ Ableitung der linken Seite

$$2(x^2+y^2)(2x+2y\cdot \boxed{y'}) = a^2(2x-2y\cdot \boxed{y'}) \quad \Big| -2(x^2+y^2)2x + a^2 2y\,y'$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)2\cdot y\cdot \boxed{y'} + a^2 2y\cdot \boxed{y'} = -2(x^2+y^2)2x + a^2 2x$$

$$\Leftrightarrow y'\cdot \cancel{2}y\left[\underbrace{2(x^2+y^2)+a^2}_{>0}\right] = \cancel{2}x\left[-2(x^2+y^2)+a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{x}{y} \frac{a^2 - 2(x^2+y^2)}{a^2 + 2(x^2+y^2)} \qquad (\text{falls } y \neq 0)$$

$$\frac{d\, y^2(x)}{dx} = 2 \cdot y \cdot y'$$

äußere innere Abl.

Aufgabe 7.4.9 von Seite 305

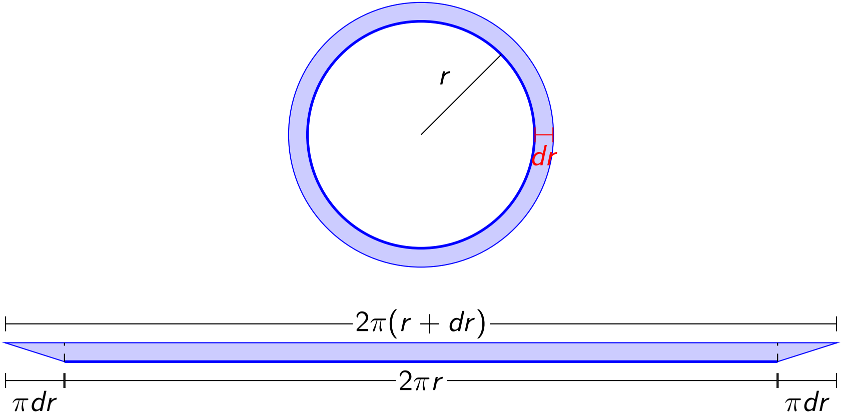
Ein Kreis mit Radius r hat:

die Fläche $F(r) = \pi r^2$

den Umfang $F'(r) = 2\pi r$

a) Erkläre die Approximation $F(r + dr) - F(r) \approx 2\pi r dr$ geometrisch.

b) Ist $F(r + dr)$ kleiner oder größer als $F(r) + 2\pi r dr$?


r
dr
$2\pi(r + dr)$
$2\pi r$
πdr
πdr

Aufgabe 3 HT 2024

Für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ mit $x > 0$ gilt:

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \text{ für alle } x > 0$$

$$\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\ln(x) \underset{x\to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

Falls $\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\Delta x) - \ln(1)}{\Delta x}$ ein Differenzenquotient ist, dann ist $\ln(1+\Delta x)$ der neue Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

alter Funktionswert: $\underbrace{\ln(1)}_{=0}$

a) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = e$

~~b)~~ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$

c) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x}$

d) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}$ existiert nicht.

$$\lim_{\Delta x} \frac{\ln(1+\Delta x) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{\Delta x} = \left.\frac{d\ln(x)}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

In Aufg. 3 HT 2024 $x_0 = 1$

$\Rightarrow f'(1)$

Aufgabe 2 NT 2024

$2\,f(x)\cdot f'(x)\cdot x^3 + (f(x))^2\cdot 3x^2 = 0 \quad \vert :f(x)\ ,\ :x^2$

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wird implizit durch die Gleichung

$$(\underbrace{f(x)}_{y})^2\cdot x^3 = 32$$

definiert, wobei $x\in\mathbb{R}_>$. Das Diagramm der nächsten Folie zeigt den Graphen dieser Funktion und eine Tangente an diesen Graphen im Punkt $(x,y)=(2,2)$. Wie lautet die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(x,y)=(2,2)$?

a) $f'(2) = -\frac{5}{32}$

~~b)~~ $f'(2) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}$

c) $f'(2) = -\frac{2}{5}$

d) $f'(2) = \frac{32}{5}$

$\Rightarrow 2\,\boxed{f'(x)}\cdot x + f(x)\cdot 3 = 0 \quad \vert -f(x)\cdot 3$

$\Leftrightarrow 2\cdot f'(x)\cdot x = -3f(x) \quad \vert :2x$

$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}\,\frac{\overbrace{f(x)}^{=y}}{x}$

$\Rightarrow f'(2) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2} = -\frac{3}{2}$

Allgemeiner Lösungsweg zu Aufg 2 NT 2024

$$y^c \cdot x^d = A$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{d}{c} \cdot \frac{y}{x}$$

---

1. Produktregel: $\frac{d(y(x)^c)}{dx} \cdot x^d + y^c \cdot \underbrace{\frac{d(x^d)}{dx}}_{= d\,x^{d-1}} = 0$

Kettenregel: $\frac{d(y(x)^c)}{dx} = \underbrace{c \cdot y(x)^{c-1}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{y'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

$$\rightarrow \quad c \cdot y^{c-1} \cdot y' \, x^d + y^c \cdot d\,x^{d-1} = 0 \quad \Big| - y^c \cdot d\,x^{d-1}$$

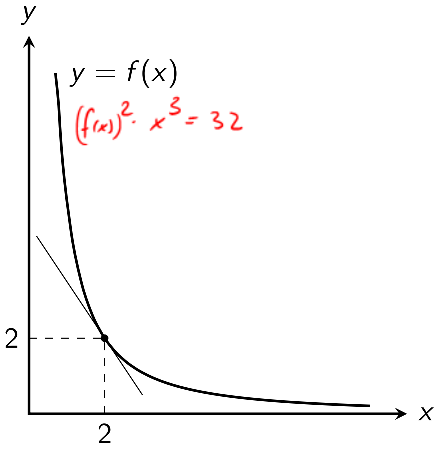
$$\Leftrightarrow \quad c \cdot y^{c-1} \cdot y' \, x^{d} = -y^{c} \cdot d \cdot x^{d-1} \quad \Big| : c : y^{c-1} : x^{d}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{y^{c} \cdot d \cdot x^{d-1}}{c \cdot y^{c-1} \cdot x^{d}} \quad \begin{matrix} : y^{c-1} & : x^{d-1} \\ : y^{c-1} & : x^{d-1} \end{matrix}$$

$$y^{c} = y \cdot y^{c-1} \qquad = -\frac{y \cdot d}{c \cdot x} = -\frac{d}{c} \cdot \frac{y}{x}$$

$$x^{d} = x \cdot x^{d-1}$$

Aufgabe 2 NT 2024



Aufgabe 3 NT 2024

$$\frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = -\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

Gegeben sei die Gleichung

$$\underbrace{\ln(x) + 2\ln(y)}_{= \ln(x) + \ln(y^2)} = 1024$$

$$\underbrace{\ln(x) + \ln(y^2)}_{= \ln(x \cdot y^2)} = 1024 \Leftrightarrow x \cdot y^2 = e^{1024}$$

$$y^2 \cdot x^{1 \leftarrow d} = \underbrace{e^{1024}}_{A}$$

für $x, y > 0$.

Wie lautet dy/dx für diese Gleichung?

a) $dy/dx = -\frac{1}{2}\boxed{\frac{x}{y}}$!

b) $dy/dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{\ln(y)}$

~~c)~~ $dy/dx = -\frac{1}{2}\frac{y}{x}$

d) $dy/dx = -\frac{x}{y}$

$$y' = -\frac{d}{c} \cdot \frac{y}{x}$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{d\, 2\ln(y(x))}{dx} = 2\frac{1}{y} \cdot y'(x)$$