Übung U06a zu Kapitel 6:[1]

Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

6.1 Steigungen von Kurven

Aufgabe 6.1.1 von Seite 229
Aufgabe 6.1.2 von Seite 229

6.2 Tangenten und Ableitungen

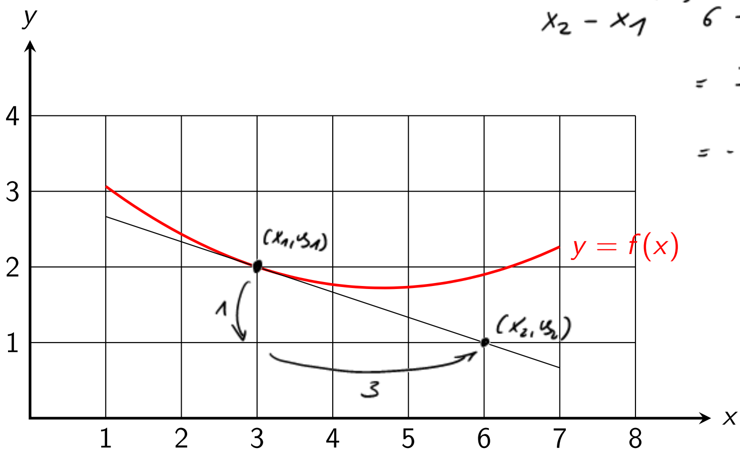
Aufgabe 6.2.1 von Seite 235
Aufgabe 6.2.2 von Seite 235

Klausuren 2023

Aufgabe 3 HT 2023
Aufgabe 4 HT 2023
Aufgabe 3 NT 2023
Aufgabe 4 NT 2023

Aufgabe 6.1.1 von Seite 229

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{6-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$



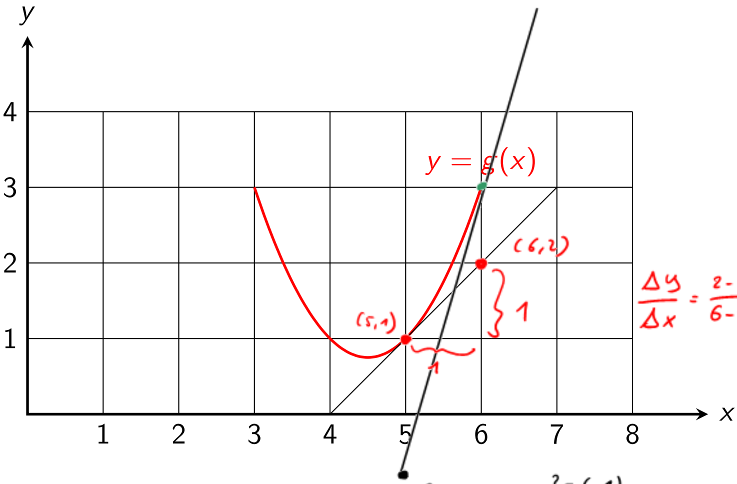
Gebe die Werte $\boxed{\begin{matrix} f(3) \\ = 2 \end{matrix}}$ und $f'(3)$ an.

$= -\frac{1}{3}$

Aufgabe 6.1.2 von Seite 229

$g(6) = 3$
$g'(6)$

$g(5) = $



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{6-5} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3-(-1)}{6-5} = 4 = g'(6)$$

Gebe die Werte $g(5)$ und $g'(5)$ an.

$= 1$ $= 1$

Aufgabe 6.2.1 von Seite 235

Binomische Formel
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$f'(x) = 2 \cdot 4x^1$

Es sei $f(x) = 4x^2$. Zeige, dass $\frac{\overbrace{f(5+\Delta x)}^{\text{neuer}} - \overbrace{f(5)}^{\text{alt}}}{\Delta x} = 40 + 4\Delta x$ für $\Delta x \neq 0$. Nutze dieses Resultat, um $f'(5)$ zu bestimmen.

$$f(5+\Delta x) = 4(5+\Delta x)^2 = 4(5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$= 100 + 40\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

$$f(5) = 4 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

$$f(5+\Delta x) - f(5) = \cancel{100} + 40\Delta x + 4(\Delta x)^2 - \cancel{100} = \Delta y$$

$$\frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \frac{40\Delta x + 4 \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} = 40 + 4 \cdot \Delta x$$

Test: $f'(5) = 2 \cdot 4 \cdot 5^1 = 40$

Aufgabe 6.2.2 von Seite 235

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

a) Zeige, dass $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 6x + 2 + 3\Delta x$ für $\Delta x \neq 0$. Benutze dieses Resultat, um $f'(x)$ zu bestimmen.

b) Bestimme insbesondere $f'(0)$, $f'(-2)$ und $f'(3)$. Bestimme auch die Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt $(0, -1)$.

Nr 1

$f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 1$

$= 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 2(x+\Delta x) - 1$

$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - 1$

$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$\cancel{3x^2} + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \cancel{2x} + 2\Delta x \cancel{-1} \cancel{-(3x^2} \cancel{+2x} \cancel{-1)}$$

$$\frac{6\cancel{x}\cancel{\Delta x} + 3\Delta x^{\cancel{2}} + 2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow 6x + 3\Delta x + 2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x + 2 = 6x + 2$$

Prüfe $\left(3x^2 + 2x - 1\right)' = 2 \cdot 3x + 2 = 6x + 2$ ✓

b) $f'(0) = 6 \cdot 0 + 2 = 2$

$f'(-2) = 6 \cdot (-2) + 2 = -12 + 2 = -10$

$f'(3) = 6 \cdot 3 + 2 = 18 + 2 = 20$

Gleichung Tangente im Punkt $(\overset{x_0}{0}, \overset{f(x_0)}{-1})$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

(siehe Vorlesung)

$$y - (-1) = \overset{f'(0)=2}{2}(x - \overset{x_0=0}{0})$$

$$\Leftrightarrow \quad y + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = 2x - 1}$$

allgemeine Gleichung für eine Gerade

$$y = mx + b$$

1. Bedingung $\quad -1 = m \cdot 0 + b$

$\Rightarrow b = -1$

2. Bedingung $\quad m = f'(0)$

$\Rightarrow m = 2$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Aufgabe 3 HT 2023

$f'(x) = -2 \cdot 2 \cdot x + 1 = \underline{-4x+1}$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -2x^2 + x - 1$$

Welcher der angegebenen Ausdrücke entspricht dem Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für ein beliebiges $\Delta x \neq 0$?

$\Delta x = 0$

a) $-4x - 2\Delta x + 1$ | $\underline{-4x+1}$ ✓
b) $-4x - 4\Delta x + 1$ | $\underline{-4x+1}$
c) $-2x + 1 - 2\Delta x$ | $-2x+1$ ✗
d) $-2(2x + \Delta x - 1)$ | $-4x+2$ ✗

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{-2(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1 - \left(-2x^2 + x - 1\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-2\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) \cancel{+x} + \Delta x \cancel{-1} + 2x^2 \cancel{-x} \cancel{+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{-2x^2} - 4x\,\cancel{\Delta x} - 2(\Delta x)^{\cancel{2}} + \overset{1}{\cancel{\Delta x}} \cancel{+2x^2}}{\cancel{\Delta x}\;1}$$

$$= -4x - 2\Delta x + 1 \quad \rightarrow \quad a)$$

Aufgabe 4 HT 2023

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (3x^2 - 2)(2 - 3x^2)$$

Welcher der angegebenen Ausdrücke entspricht der ersten Ableitung dieser Funktion?

a) $f'(x) = 0$
b) $f'(x) = -2x(6x - 2)$
c) $f'(x) = -2x(3x^2 - 2)$
d) $f'(x) = -12x(3x^2 - 2)$

$f(x) = (3x^2-2)(2-3x^2)$

Lösungsweg 1 : Ausmultiplizieren

$f(x) = 6x^2 - 9x^4 - 4 + 6x^2 = 12x^2 - 9x^4 - 4$

$f'(x) = 2 \cdot 12x^1 - 4 \cdot 9x^3 = \boxed{24 \cdot x - 36x^3}$

$= -2x(-12 + 18x^2)$

$= -12x(-2 + 3x^2) = -12x(3x^2 - 2)$ $\rightarrow$ d) ✓

$$f(x) = \underbrace{(3x^2 - 2)}_{h(x)}\underbrace{(2 - 3x^2)}_{g(x)}$$

Lösungsweg ?: Produktregel $\left(h(x)\,g(x)\right)' = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$

$h'(x) = 2 \cdot 3x = 6x \qquad g'(x) = -6x$

$$f'(x) = \underbrace{6x}_{h'}\,(\underbrace{2 - 3x^2}_{g}) + (\underbrace{3x^2-2}_{h})(\underbrace{-6x}_{g'})$$

$$= 12x - 18x^3 - 18x^3 + 12x$$

$$= -36x^3 + 24x$$

$$= -12x(3x^2 - 2) \longrightarrow d) \checkmark$$

$$f(x) = (3x^2-2)(2-3x^2)$$

$$= -(3x^2-2)(3x^2-2)$$

$$= -(\underbrace{3x^2-2}_{u})^2$$

Lösungsweg 3: Kettenregel

innere Funktion: $\overbrace{3x^2-2}^{g(x)=u}$ $\quad (3x^2-2)' = 6\cdot x$

äußere Funktion $-u^2$ $\quad (-u^2)' = -2\cdot u$

$$f'(x) = -2\cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 3x^2-2}}{u}\cdot 6x = -12\cdot x\,(3x^2-2) \rightarrow d) \checkmark$$

Aufgabe 3 NT 2023

$f'(x) = 2 \cdot 3x - 2 = 6x - 2$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$f'(2) = 6 \cdot 2 - 2$
$= 12 - 2 = 10$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

Wie lautet die Steigung der Tangente an den zugehörigen Graphen im Punkt $(\underline{x_0}, y_0) = (\underline{2}, 11)$?

a) $f'(y_0) = 64$

b) $f(y_0) = 344$

c) $f'(x_0) = \underline{\underline{10}}$ ✓

d) $f(x_0) = 11$

Aufgabe 4 NT 2023

f monoton wachsend : $f' \geq 0$

positive reelle Zahlen : $x > 0$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{>} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(x)^2 - 16, \ x \in \mathbb{R}_{>}$$

In welchem der folgenden Intervalle ist f nicht monoton wachsend?

$f'(x) < 0$

a) $(0, 1)$
b) $(2, e)$
c) $(1, 2)$
d) (e, ∞)

$f'(x) = 2 \cdot u \frac{1}{x}$

$= 2 \cdot \ln(x) \frac{1}{x}$

innere Funktion $\overbrace{\ln(x)}^{u}$

äußere Funktion $u^2 - 16$

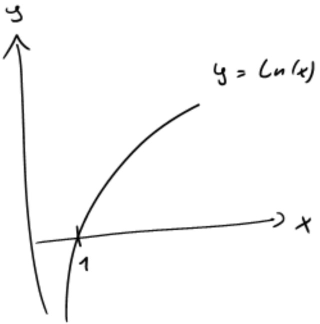
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(u^2 - 16)' = 2 \cdot u$

$f'(x) < 0 \iff 2 \cdot \ln(x) \frac{1}{x} < 0 \quad \| : 2 \cdot x$

$\iff \ln(x) < 0$

$\iff x < 1$



Also $f'(x) < 0$ für alle x: $0 < x < 1$

$\rightarrow$ a) ✓