Mathematik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 26. März 2025

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nachname ____________

Studiengang ____________ Vorname ____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 14 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 26 von maximal 42 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es sei die Funktion $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x^2 + 2x + 5 \text{ für alle } -5 \leq x \leq 5$$

definiert.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) f ist streng monoton fallend auf $[1, 5]$.

b) f ist monoton fallend auf $[-5, -1]$.

c) f ist monoton steigend auf $[-1, 5]$.

d) f ist streng monoton steigend auf $[1, 5]$.

Aufgabe 2 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es seien die zwei Funktionen $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \ln(x) \text{ und } g(x) = 10 - x \text{ für } x > 0$$

gegeben.

Wie lautet die Ableitung $(f(x) \cdot g(x))'$?

a) $(f(x) \cdot g(x))' = \frac{10}{x} - 1 - \ln(x)$

b) $(f(x) \cdot g(x))' = -\frac{1}{x}$

c) $(f(x) \cdot g(x))' = \frac{1}{x} - 1$

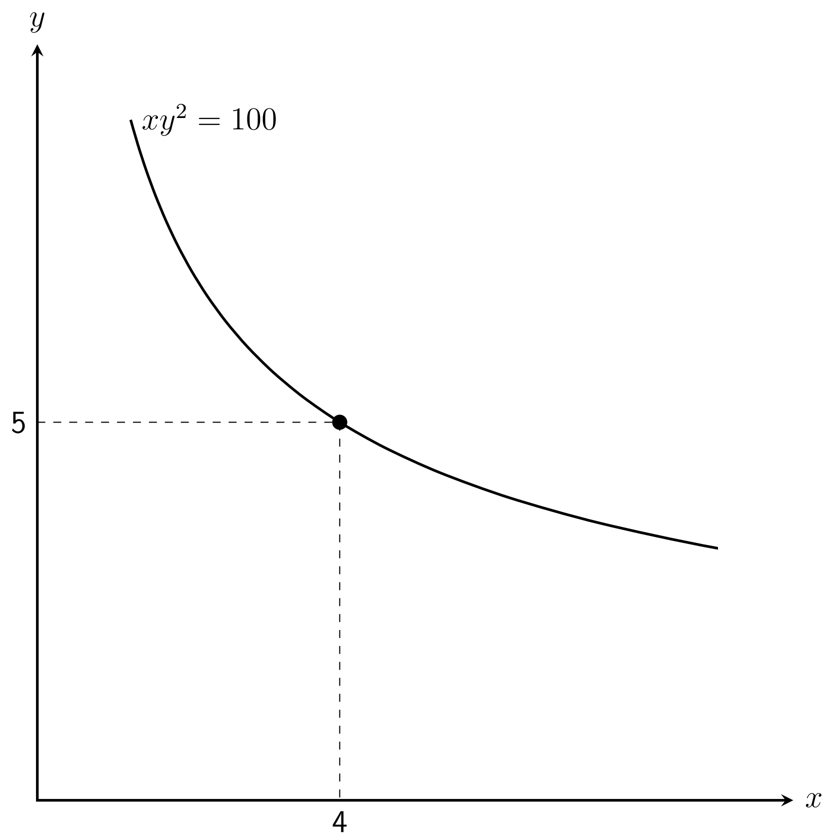
d) $(f(x) \cdot g(x))' = e^x(10 - x) - \ln(x)$

Aufgabe 3 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Die Gleichung

$$xy^2 = 100$$

definiere für $x, y > 0$ folgenden Graphen:



Wie lautet die Steigung des Graphen im Punkt $(4, 5)$?

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{8}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{4}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{4}$

Aufgabe 4 zu Kapitel 8 Konkave und konvexe Funktionen

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Die Funktion f ist konkav.

b) Die Funktion f ist konvex.

c) Die Funktion f ist strikt konkav.

d) Die Funktion f ist strikt konvex.

Aufgabe 5 zu Kapitel 9 Optimierung

Es sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{50}{x} + \frac{1}{2}x \text{ für } x > 0$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Funktion f besitzt eine Maximumstelle.

b) Die Funktion f besitzt eine Minimumstelle.

c) Die Funktion f besitzt keine Maximumstelle.

d) Es gilt $f(x) \geq 10$ für alle $x > 0$.

Aufgabe 6 zu Kapitel 9 Optimierung

Die Funktion f sei für $-3 \leq x \leq 0$ definiert durch

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Wie lautet die Minimumstelle x^* dieser Funktion auf $[-3, 0]$?

a) $x^* = -3$

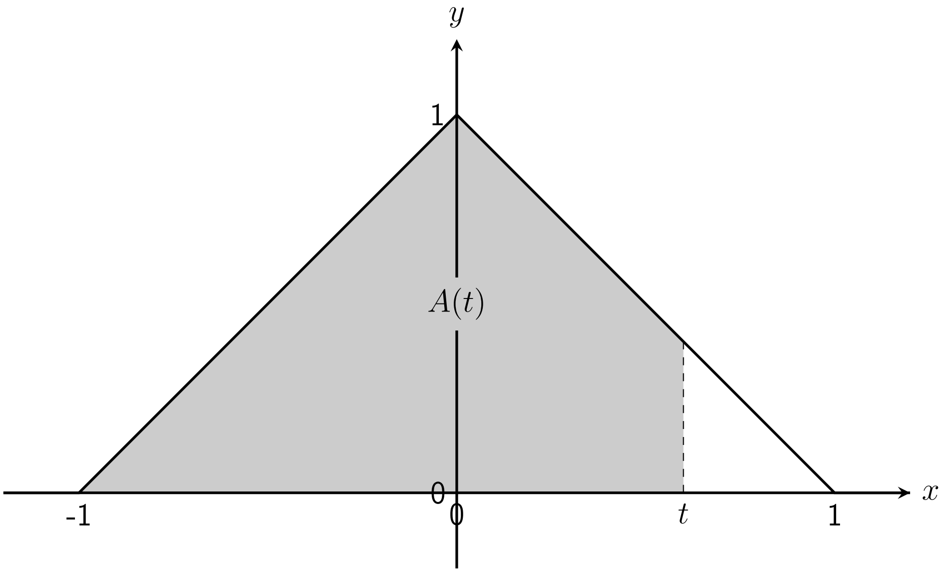
b) $x^* = -2$

c) $x^* = -1$

d) $x^* = 0$

Aufgabe 7 zu Kapitel 10 Integration

Es sei die im Diagramm graue Fläche durch $A(t)$ bezeichnet.



Welcher der folgenden Ausdrücke in Bezug auf die Ableitung $A'(t)$ ist falsch?

a) $A'(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ nicht definiert.

b) $A'(t) = t + 1$ für $-1 \leq t < 0$

c) $A'(t) = 1 - t$ für $0 < t \leq 1$

d) $A'(t) = 0$ für $1 \leq t$.

Aufgabe 8 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Welche Aussage in Bezug auf das Produkt der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

ist richtig?

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Betrachtet sei das folgende System linearer Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Das obige Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

b) Das obige Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

c) Das obige Gleichungssystem hat keine Lösung.

d) Das obige Gleichungssystem hat genau zwei Lösungen.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert.

Wie lautet die Hessematrix der Funktion f?

a) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) Die Funktion f besitzt keine Hessematrix.

Aufgabe 11 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + y$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Die Funktion f ist nicht homogen.

b) Die Funktion f ist homogen vom Grad 1.

c) Die Funktion f ist homogen vom Grad 2.

d) Die Funktion f ist homogen vom Grad x^2 für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Die Hessematrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) f ist weder konkav noch konvex.

b) f ist konkav.

c) f ist konvex.

d) f ist streng konkav.

Aufgabe 13 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 \ , \text{ für } x,y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist in Bezug auf die Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ wahr?

a) (x_0, y_0) ist ein Sattelpunkt von f.

b) (x_0, y_0) ist keine Extremstelle von f.

c) (x_0, y_0) ist eine Maximumstelle von f.

d) (x_0, y_0) ist eine Minimumstelle von f.

Aufgabe 14 zu Kapitel 18 Nebenbedingungen in Gleichheit

Wie lautet/lauten die Extremstellen des folgenden Optimierungsproblems?

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; 2x^2 + 3xy - 2y^2 \text{ u.d.B } x + y = 6$$

a) $(x^*, y^*) = (7, -1)$

b) $(x^*, y^*) = (6, 0)$

c) $(x^*, y^*) = (8, -2)$

d) $(x^*, y^*) = (-2, 8)$

Lösung zu Aufgabe 1

Lösungsvariante mit 1. Ableitung

Es gilt:

$$f'(x) = 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Wir können zusammenfassen festellen:

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{falls } -5 \leq x < -1 \\ = 0 & \text{falls } x = -1 \\ > 0 & \text{falls } x > -1 \end{cases}$$

Also gilt:

- f ist monoton fallend auf $[-5, -1]$
- f ist monoton steigend auf $[-1, 5]$
- f ist streng monoton steigend auf $[1, 5]$
  aber
- f ist nicht streng monoton fallend auf $[1, 5]$.

Lösungsvariante mit Ungleichungen

Prüfe Aussage, dass f streng monoton fallend auf $[1, 5]$. Seien x_1, x_2 mit $1 \leq x_1 < x_2 \leq 5$.

Dann gilt:

$$f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow x_2^2 + 2x_2 + 5 < x_1^2 + 2x_1 + 5 \Leftrightarrow x^2 - x_1^2 + 2(x_2 - x_1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}(x_2 + x_1) + 2\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Leftrightarrow x_2 + x_1 + 2 < 0 \text{ Widerspruch}$$

Also ist f nicht streng monoton fallend auf $[1, 5]$.

Lösung zu Aufgabe 2

Da es sich bei $f(x) \cdot g(x)$ um ein Produkt handelt, ist die Produktregel beim Ableiten anzuwenden:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = -1$ folgt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = \frac{1}{x} \cdot (10 - x) + \ln(x) \cdot (-1) = \frac{10}{x} - \frac{x}{x} - \ln(x) = \frac{10}{x} - 1 - \ln(x)$$

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungsweg implizites Differenzieren

Interpretiere y als Funktion von x: $y(x)$ und leite beide Seiten der Gleichung $xy(x)^2 = 100$ mit Produkt- und Kettenregel nach x ab.

Produktregel:

$$y(x)^2 + x\left(y(x)^2\right)' = 0$$

Kettenregel:

$$y(x)^2 + x \cdot 2 \cdot y(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Umstellen nach $\frac{dy}{dx}$ (nun kann wieder y anstelle von $y(x)$ geschrieben werden):

$$y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2xy\frac{dy}{dx} = -y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2xy} = -\frac{y}{2x}$$

An der Stelle $(x, y) = (4, 5)$ gilt dann:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2 \cdot 4} = -\frac{5}{8}$$

Lösungsweg durch implizites Funktionen Theorem

Für $F(x, y) = xy^2$ gilt: Die Steigung einer Höhenlinie durch den Punkt (x_0, y_0) kann berechnet werden durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x_0, y_0)}{F_2'(x_0, y_0)} \text{ (falls } F_2'(x_0, y_0) \neq 0)$$

Mit $F_1'(x_0, y_0) = y_0^2$ und $F_1'(x_0, y_0) = 2x_0y_0$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y_0^2}{2x_0y_0} - \frac{y_0}{2x_0}$$

Für $(x_0, y_0) = (4, 5)$ gilt dann:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2 \cdot 4} = -\frac{5}{8}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungsvariante Definition

Eine Funktion ist konkav, falls

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

für alle $x_1 \neq x_2$ und $0 < \lambda < 1$.

f ist konvex, falls die Ungleichung umgekehrt gilt. f ist strikt konkav/konvex, falls die jeweilige Ungleichung strikt gilt.

Nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $x_1 < x_2$.

Nehme vorläufig an, dass $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq 1$. Daraus folgt, dass $x_1 \leq 1$ und $f(x_1) = x_1$.
(Wäre $x_1 > 1$, dann wäre auch $x_2 > 1$ und $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 > 1$.)

Fall $x_2 \leq 1$ ($\Rightarrow f(x_2) = x_2$)

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \\ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Die Ungleichung kann also nicht für alle $x_1 \neq x_2$ strikt sein, daher kann strikte Konkavität/Konvexität ausgeschlossen werden.

Fall $x_2 > 1$ ($\Rightarrow f(x_2) = 2 - x_2$)

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \\ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)(2 - x_2) \end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ \Leftrightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 &\geq \lambda x_1 + (1 - \lambda)(2 - x_2) \\ \Leftrightarrow (1 - \lambda)x_2 &\geq (1 - \lambda)(2 - x_2) \\ \Leftrightarrow x_2 &\geq 2 - x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &\geq 1 \checkmark \end{aligned}$$

Daher kann f nicht konvex sein. Dann bleibt nur die Antwortmöglichkeit „Die Funktion ist konkav.“ übrig.

Lösungsvariante Monotonie von f'

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1 \\ -1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Die erste Ableitung ist also monoton fallend (überall dort, wo sie definiert ist). Daher ist f konkav.

Lösung zu Aufgabe 5

Zunächst: Die beiden Antwortmöglichkeiten

- Die Funktion f besitzt eine Maximumstelle.
- Die Funktion f besitzt keine Maximumstelle.

schließen sich gegenseitig aus. Damit muss eine von beiden richtig und die andere falsch sein.

Falls f eine Extremstelle in $(0, \infty)$ besitzt, so muss diese stationär sein.

$$f'(x) = -\frac{50}{x^2} + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 = 100$$

Wegen $x > 0$ kommt also nur $x = 10$ infrage. Für diese Stelle gilt:

$$f(10) = \frac{50}{10} + \frac{1}{2}10 = 5 + 5 = 10$$

Wir berechnen den Funktionswert für den Wert $x = 2$, weil für diesen Wert die Berechnung einfach (alternativ: $x = 50$) ist und vergleichen diesen mit dem Funktionswert an der Stelle $x = 10$:

$$f(2) = \frac{50}{2} + \frac{1}{2}2 = 25 + 1 = 26 > 10 = f(10)$$

Demnach kann $x = 10$ keine Maximumstelle sein. Da es keine andere stationäre Stelle gibt, besitzt die Funktion also keine Maximumstelle.

Alternativ kann auch die zweite Ableitung berechnet werden:

$$f''(x) = \frac{100}{x^3} > 0 \text{ für } x > 0$$

Damit ist die Funktion f streng konvex und eine stationäre Stelle muss eine Minimumstelle sein.

Lösung zu Aufgabe 6

Suche alle inneren stationären Stellen:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Berechne den Funktionswert an allen inneren stationären Stellen und an dem beiden Rändern:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 6(-3)^2 + 12(-3) + 8 = -27 + 54 - 36 + 8 = -66 + 62 = -4 \\ f(-2) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 12(-2) + 8 = -8 + 24 + 24 - 24 = 16 \\ f(0) &= 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 8 = 8 \end{aligned}$$

Die Minimumstelle lautet $x^* = -3$, da dort der Funktionswert am kleinsten ist.

Lösungsvariante

Da die erste Ableitung mit $f'(x) = (x+2)^2 \geq 0$ für alle x ist, wechselt sie an der Stelle $x = -2$ nicht das Vorzeichen. Daher muss $x = -2$ ein Sattelpunkt sein und kann keine Minimumstelle sein.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsvariante A

Die Funktion, welche den oberen Rand der angegebenen Fläche beschreibt, lautet

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq -1 \\ 1+t & \text{falls } -1 < t \leq 0 \\ 1-t & \text{falls } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{falls } 1 < t \end{cases}$$

Mit $A(t) = \int_{\infty}^{t} a(t)dt$ folgt $A'(t) = a(t)$. Also gilt $A'(0) = a(0) = 1 + 0 = 1$. Damit ist $A'(0)$ wohldefiniert.

<u>Lösungsvariante B</u>

Die Formel für die im Diagramm angegebene Fläche lautet

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq -1 \\ \frac{1}{2}(t+1)^2 & \text{falls } -1 < t \leq 0 \\ t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} & \text{falls } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{falls } 1 < t \end{cases}$$

Auf den offenen Intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, \infty)$ lauten die Ableitungen

$$A'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < -1 \\ t+1 & \text{falls } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$

Wegen $\lim_{t\to 0^-} A'(t) = 0 + 1 = 1 = 1 - 0 = \lim_{t\to 0^+} A'(t)$ lautet $A'(0) = 1$. Damit ist $A'(0)$ wohldefiniert.

Lösung zu Aufgabe 8

<u>Lösungsvariante Inverse</u>

Für eine allgemeine 2×2 Matrix gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{, falls } ad \neq bc$$

Für A gilt: $|A| = 1 \cdot 17 - 2 \cdot 8 = 1$. Daher ist B offensichtlich die inverse Matrix von A und es gilt $AB = I$.

<u>Lösungsvariante ausrechnen</u>

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-8) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 8 \cdot 17 + 17 \cdot (-8) & 8 \cdot (-2) + 17 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - 16 & -2 + 2 \\ 8 \cdot 17 - 17 \cdot 8 & -16 + 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9

<u>Variante durch Lösen per Substitution</u> Wir können das Gleichungssystem schreiben als

$$2x - 1y = 1$$

$$4x - 2y = 2$$

Wenn wir die zweite Gleichung auf beiden Seiten durch 2 dividieren, erhalten wir die erste Gleichung. Das Gleichungssystem besteht also eigentlich nur aus der ersten Gleichung. Formen wir diese nach y um erhalten wir:

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow -y = 1 - 2x \Leftrightarrow y = -1 + 2x$$

Die Lösungen des Gleichungssystems liegen also alle auf einer Geraden mit Y-Achsenabschnitt -1 und Steigung 2. Es gibt unendlich viele Punkte auf dieser Geraden. Damit hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Um die anderen drei Antwortmöglichkeiten auszuschließen sind beispielhaft folgende drei Lösungen angegeben:

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \ , \ (x_2, y_2) = (2, 3) \ , \ (x_3, y_3) = (3, 5)$$

Variante durch Ausklammern

Die Spaltenvektoren $\binom{2}{4}$ und $\binom{-1}{-2}$ der Matrix beinhalten den Vektor der rechten Seite $\binom{1}{2}$: $\binom{2}{4} = 2\binom{1}{2}$ und $\binom{-1}{-2} = -\binom{1}{2}$. Daher kann das Gleichungssystem wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2x - y - 1) = 0$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also genau dann erfüllt, wenn $2x - y - 1 = 0$. Danach geht es mit der obigen Lösungsvariante weiter.

Lösung zu Aufgabe 10

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$f_1'(x, y) = 4x + 3y$$
$$f_2'(x, y) = 3x - 4y$$

Damit lautet die Matrix der zweiten Ableitungen (die „Hessematrix“):

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 11

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + y$$

Prüfe Homogenität:

$$f(tx, ty) = \ln((tx)^2 + 1) + ty = \ln(t^2x^2 + 1) + ty$$
$$t^k f(x, y) = t^k \ln(x^2 + 1) + t^k y = \ln\left((x^2 + 1)^{(t^k)}\right) + t^k y$$

Aufgrund des Terms ty in $f(tx, ty)$ und des Terms $t^k y$ in $t^k f(x, y)$ muss $k = 1$ gelten. Dann gilt:

$$tf(x, y) = t\ln(x^2 + 1) + ty = \ln\left((x^2 + 1)^t\right) + ty$$

Da aber $t^2x^2 + 1 \neq (x^2 + 1)^t$ für $t \neq 1$ und $x \neq 0$ ist auch die Darstellung $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ nicht möglich. Deswegen ist f nicht homogen.

Lösung zu Aufgabe 13

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

Die ersten Ableitungen der Funktion f lauten

$$f_1'(x, y) = 4x + 3y \text{ und } f_2'(x, y) = 3x - 4y$$

An der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ sind beide ersten Ableitungen gleich null, daher ist (x_0, y_0) ein kritischer Punkt von f.

Lösungsvariante Hessematrix indefinit

Die Hessematrix der Funktion f lautet

$$f'' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Wegen $|f''| = -16 - 9 = -25 < 0$ ist f'' indefinit und daher sind kritische Stellen Sattelpunkte.

Lösungsvariante Definition Sattelpunkt

Für den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ gilt $f(0, 0) = 0$. Außerdem gilt $f(\epsilon, 0) = 2\epsilon^2 > 0$ und $f(0, \epsilon) =$

$-2\epsilon^2 < 0$. Das heißt es gibt beliebig nah an (x_0, y_0) Punkte, an denen der Funktionswert höher bzw. niedriger ist als an der Stelle (x_0, y_0). Deswegen ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.

Lösung zu Aufgabe 14

Lösungsweg mit Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 - \lambda(x+y-6)$$

BEO:

$$\mathcal{L}_1' = 4x + 3y - \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathcal{L}_2' = 3x - 4y - \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$x + y = 6$$

$$\Rightarrow 4x + 3y = 3x - 4y \Leftrightarrow x = -7y$$

$$\Rightarrow x + y = -7y + 7 = -6y = 6 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = 7$$

Falls es eine Extremstelle gibt, muss diese bei $(x^*, y^*) = (7, -1)$ liegen.

Lösungsweg durch Einsetzen

$$2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 \cdot (-1) - 2(-1)^2 = 2 \cdot 49 - 21 - 2 = 98 - 23 = 75$$

$$2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 \cdot (-2) - 2(-2)^2 = 2 \cdot 64 - 48 - 8 = 128 - 56 = 72$$

$$2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 \cdot 0 - 2(0^2) = 2 \cdot 36 = 72$$

$$2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) \cdot 8 - 2 \cdot 8^2 = 8 - 48 - 2 \cdot 64 = -40 - 128 = -168$$

Wir können mit diesem Lösungsweg die Möglichkeiten $(8, -2)$ und $(6, 0)$ ausschließen, aber nicht eine der beiden verbleibenden Möglichkeiten verifizieren.

Lösungsweg mit Substitution

$$x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x(6-x) - 2(6-x)^2$$

$$g'(x) = 4x + 3(6-x) - 3x - 4(6-x)(-1) = 4x + 18 - 3x - 3x + 24 - 4x = -6x + 42$$

BEO:

$$-6x + 42 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 7$$

Hinreichende Bedingung:

$$g''(x) = -6 < 0$$

Der stationäre Punkt $x = 7$ ist also ein Maximum von g.