Variante **A**

Mathematik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 27. März 2024

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ______________

Studiengang ______________ Vorname ______________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es seien die zwei differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Es gelte $g(0) = 0$ und $h(10) = 0$.

Wie lautet die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

a) $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

b) $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$

c) $f'(x) = \left(g'(x) \cdot h'(x) - g(x) \cdot h'(x)\right) / h(x)^2$

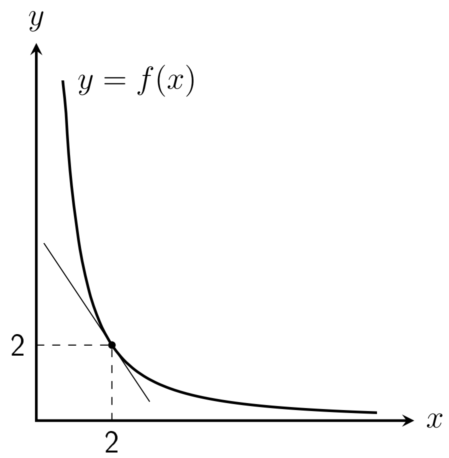
d) Die Ableitung von f lässt sich für $x = 0$ und $x = 10$ nicht berechnen.

Aufgabe 2 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird implizit durch die Gleichung

$$(f(x))^2 \cdot x^3 = 32$$

definiert, wobei $x \in \mathbb{R}_{>}$. Das folgende Diagramm zeigt den Graphen dieser Funktion und eine Tangente an diesen Graphen im Punkt $(x, y) = (2, 2)$.



Wie lautet die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(x, y) = (2, 2)$?

a) $f'(2) = -\frac{3}{2}$

b) $f'(2) = -\frac{2}{5}$

c) $f'(2) = \frac{32}{5}$

d) $f'(2) = -\frac{5}{32}$

Aufgabe 3 zu Kapitel 8 Univariate Optimierung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche wie folgt definiert sei:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & \text{falls } x \leq 1 \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) An der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ ist ein Sattelpunkt von f.

b) An der Stelle $x_0 = 0$ ist ein Sattelpunkt von f.

c) An der Stelle $x_0 = 0$ ist f stationär.

d) An der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ ist f stationär.

Aufgabe 4 zu Kapitel 9 Integralrechnung

Die Funktion $A : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$A(t) = \int_0^t (8 - x) \cdot x dx$$

definiert.

Wie lautet die Ableitung der Funktion A an der Stelle $t = 4$?

a) $A'(4) = 16$

b) $A'(4) = 0$

c) $A'(4) = -8x$

d) $A'(4) = 128/3$

Aufgabe 5 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2_{\geq} \to \mathbb{R}$ sei für $x, y \geq 0$ definiert durch:

$$f(x,y) = \left(x^3 y^2\right)^{\frac{1}{5}}$$

Für $x = 1$, $y = 32$ gilt $f(1,32) = 4$.

Welchen Wert nimmt die Funktion an der Stelle $(x,y) = (2,64)$ an?

a) Es gilt $f(2,64) = 8$.

b) Es gilt $f(2,64) = 256$.

c) Es gilt $f(2,64) = 128$.

d) Es gilt $f(2,64) = 20$.

Aufgabe 6 zu Kapitel 12 Komparative Statik

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) = (x - 5)^2 - (y - 7)^2 \ \ , x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Gleichungen in den Variablen x, y und z beschreibt die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (5, 7)$?

a) $z = 0$

b) $z = 10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$

c) $z = 10 \cdot (x - 5) - 14(y - 7)$

d) $z = -10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$

Aufgabe 7 zu Kapitel 13 Multivariate Optimierung

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 36x - 18y + 7 \ , \ \ x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Die Funktion f besitzt mindestens ein Maximum.

b) Die Funktion f besitzt mindestens ein Minimum.

c) Die Funktion f besitzt mindestens ein Minimum und mindestens ein Maximum.

d) Die Funktion f besitzt mindestens einen Sattelpunkt.

Aufgabe 8 zu Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2_{\geq} \to \mathbb{R}$ für $x, y \geq 0$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = \sqrt{x} + y$$

Das Optimierungsproblem laute:

$$\max_{x,y \geq 0} f(x, y) \text{ unter der Bedingung } x + y = m$$

mit $m > \frac{5}{4}$.

Es bezeichne $(x^*(m), y^*(m))$ die positive Maximumstelle des Problems und $f^*(m)$ den Maximumwert des Problems.

Wie lautet die Ableitung dieses Maximumwerts nach m?

a) $\frac{df^*(m)}{dm} = 1$

b) $\frac{df^*(m)}{dm} = \frac{2}{5}\sqrt{x^*(m)}$

c) $\frac{df^*(m)}{dm} = \frac{5}{4}$

d) $\frac{df^*(m)}{dm} = m$

Aufgabe 9 zu Kapitel 15 Matrizen und Vektoralgebra

Wie lauten die Zahlen a, b und x, sodass die folgende Gleichung gültig ist?

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $a = 1,\ b = -1,\ x = 2$

b) $a = 2,\ b = 1,\ x = -1$

c) $a = 2,\ b = -1,\ x = 1$

d) $a = -1,\ b = -1,\ x = -2$

Aufgabe 10 zu Kapitel 16 Determinanten und inverse Matrizen

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2-x \\ x-2 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $x \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von x ist die Determinante von A gleich null?

a) $|A| = 0$ für $x = -2$ und $x = 6$

b) $|A| = 0$ für $x = -2$ und $x = 2$

c) $|A| = 0$ für $x = 4$

d) $|A| = 0$ für $x = -4$ und $x = 4$

Lösung zu Aufgabe 1

Die Produktregel lautet $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

Lösung zu Aufgabe 2

Implizites Differenzieren ergibt

$$2f(x)f'(x)x^3 + 3f(x)^2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)x + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}\frac{f(x)}{x}$$

Im Punkt $(x, f(x)) = (2, 2)$ bedeutet dies: $f'(2) = -\frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Wegen $x_0 = 0 < 1$ gilt: $f'(x_0) = x_0^2 = 0$ und wegen $x_1 = \frac{5}{3} > 1$ gilt: $f'(x_1) = -\frac{3}{2}\left(x_1 - \frac{5}{3}\right) = 0$. Also ist f an den Stellen x_0 und x_1 stationär.

Die erste Ableitung $f'(x)$ wechselt für x nahe x_0 nicht das Vorzeichen an der Stelle x_0. Also ist x_0 ein Sattelpunkt. Die erste Ableitung $f'(x)$ wechselt für x nahe x_1 das Vorzeichen an der Stelle x_1. Also ist x_1 kein Sattelpunkt.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Ableitung von A entspricht dem Integranden $(8 - x)x$ ausgewertet an der Stelle t: $A'(t) = (8 - t)t$. Für $t = 4$ ergibt sich $A'(4) = (8 - 4)4 = 4^2 = 16$.

Lösung zu Aufgabe 5

Variante 1: Mit $64 = 2^6$ ergibt sich:

$$(2^3(2^6)^2)^{\frac{1}{5}} = (2^3 2^{12})^{\frac{1}{5}} = (2^{15})^{\frac{1}{5}} = 2^3 = 8$$

Variante 2: wegen $f(x, y) = x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$ und $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ ist die Funktion homogen vom Grad 1, daher führt eine Verdopplung von x und y zu einer Verdopplung des Funktionswertes:

$$f(2, 64) = 2f(1, 32) = 2 \cdot 4 = 8$$

Lösung zu Aufgabe 6

Für die partiellen Ableitungen der Funktion an der Stelle $(x_0, y_0) = (5, 7)$ gilt:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 2(x_0 - 5) = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} = -2(y_0 - 7) = 0$$

Außerdem gilt $f(x_0, y_0) = 0$. Daher ist die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) durch die Ebene gegeben, welche horizontal in der Höhe null verläuft. Der z-Wert der Ebene ist also für beliebige x, y immer gleich null.

Lösung zu Aufgabe 7

Die Hessematrix der gegebenen Funktion lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Wegen $-6 < 0$ und $-6 \cdot (-6) - 2 \cdot 2 = 36 - 4 = 32 > 0$ ist die Funktion streng konkav und kann daher keine Minima oder Sattelpunkte besitzen. Da eine Antwortmöglichkeit wahr sein muss, besitzt die Funktion mindestens ein Maximum.

Wer möchte, kann dieses auch über die notwendigen Bedingungen ausrechnen: $x^* = \frac{45}{8}$, $y^* = -\frac{9}{8}$.

Lösung zu Aufgabe 8

Die Ableitung der Optimalwertfunktion entspricht dem Lagrange-Multiplikator λ im Optimum. Hierfür definieren wir die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x, y) = \sqrt{x} + y - \lambda(x + y - m)$$

Die notwendige Bedingung erster Ordnung für y lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - \lambda \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Damit gilt $\frac{df^*(m)}{dm} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 9

Variante 1: Die Gleichung ist offensichtlich genau dann gültig, wenn

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ x & a \end{pmatrix}$$

Auf der linken Seite müssen a und x so gewählt werden, dass die beiden linken Matrizen übereinstimmen, also $a = 1$ und $x = 2$ und auf der rechten Seite müssen b, x und a so gewählt werden, dass die beiden rechten Matrizen übereinstimmen, also $b = -1$, $x = 2$ und $a = 1$.

Variante 2: Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ x-2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & 0 \\ -2b-x & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & 0 \\ 2x-2+2b & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned} -a-b &= 0 \Leftrightarrow b = -a \\ 2x-2+2b &= 0 \Leftrightarrow x = 1-b \\ a-1 &= 0 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Demnach gilt $a = 1$, $b = -1$ und $x = 2$.

Lösung zu Aufgabe 10

Die Determinante von A ist gegeben durch $8 \cdot (-2) - (2-x)(x-2) = -16 + (x-2)^2$. Diese ist gleich null, falls $(x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 4$, also $x_1 = 6$ und $x_2 = -2$.