Variante **A**

Mathematik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 29. März 2023

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________________

Studiengang ____________________ Vorname ____________________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß der über Moodle bereitgestellten Liste zugelassen.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 zu Kapitel 4 Funktionen einer Variablen

Betrachten Sie folgendes Polynom zweiten Grades:

$$P(x) = x^2 - 4$$

Welcher der folgenden Ausdrücke ist ein Faktor dieses Polynoms?

a) $x + 4$

b) $x - 4$

c) $x + 1$

d) $x + 2$

Lösungsweg zu Aufgabe 1

Das Polynom lässt sich mit der dritten binomischen Formeln umformen zu:

$$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$$

Damit ist $x+2$ einer der beiden Faktoren des Polynoms.

Alternativ kann leicht überprüft werden, ob $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ eine Nullstelle des Polynoms darstellt:

$$P(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \checkmark$$

Für die anderen Antwortmöglichkeiten ergibt sich hingegen:

$$P(\pm 4) = (\pm 4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

Aufgabe 2 zu Kapitel 5 Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei die Gleichung:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Die folgenden Diagramme zeigen Kreise mit den angegebenen Mittelpunkten und dem jeweiligen Radius r.

Welches dieser Diagramme zeigt den Graphen zu dieser Gleichung?

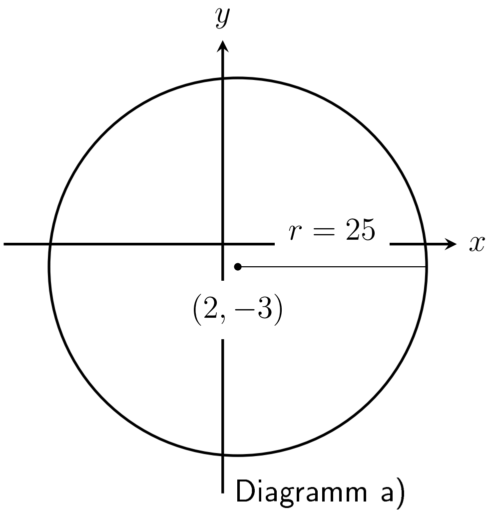


Diagramm a)

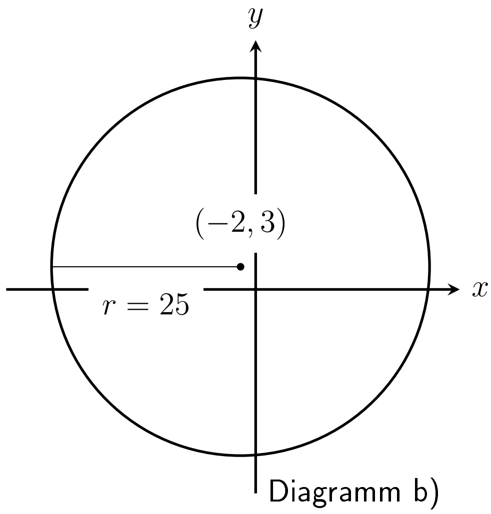


Diagramm b)

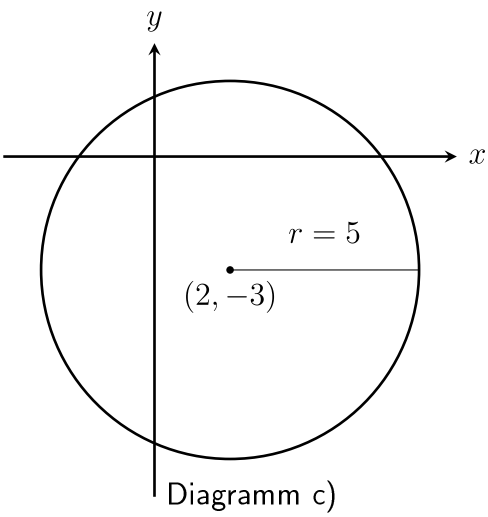


Diagramm c)

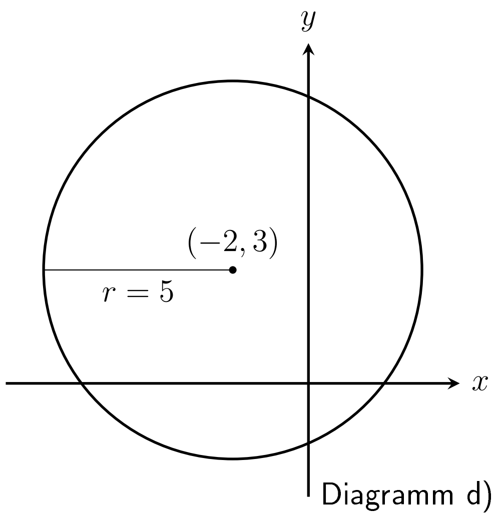


Diagramm d)

Lösungsweg zu Aufgabe 2

Die Gleichung $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(-2, 3)$ und Radius 5. Damit ist Diagramm d) richtig.

Die unzutreffenden Diagramme können folgendermaßen falsifiziert werden:

Diagramm a):
Hier müsste der Punkt $(x, y) = (2 + 25, -3) = (27, -3)$ die Gleichung erfüllen. Es gilt aber

$$(27 + 2)^2 + (-3 - 3)^2 = 29^2 + 9^2 > 25$$

Diagramm b):
Hier müsste der Punkt $(x, y) = (-2 - 25, 3) = (-27, 3)$ die Gleichung erfüllen. Es gilt aber

$$(-27 + 2)^2 + (3 - 3)^2 = 25^2 > 25$$

Diagramm c):
Hier müsste der Punkt $(x, y) = (2 + 5, -3) = (7, -3)$ die Gleichung erfüllen. Es gilt aber

$$(7 + 2)^2 + (-3 - 3)^2 = 9^2 + 9^2 = 2 \cdot 81 > 25$$

Aufgabe 3 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

Wie lautet die Steigung der Tangente an den zugehörigen Graphen im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 11)$?

a) $f'(y_0) = 64$

b) $f(y_0) = 344$

c) $f'(x_0) = 10$

d) $f(x_0) = 11$

Lösungsweg zu Aufgabe 3

Die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt (x_0, y_0) entspricht der ersten Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0: $f'(x_0) = 6x_0 - 2$. Mit $x_0 = 2$ ergibt sich

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 12 - 2 = 10$$

Damit ist Antwort c) richtig.

Aufgabe 4 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_> \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \ln(x)^2 - 16,\ x \in \mathbb{R}_>$$

In welchem der folgenden Intervalle ist f nicht monoton wachsend?

a) $(0, 1)$

b) $(2, e)$

c) $(1, 2)$

d) (e, ∞)

Lösungsweg zu Aufgabe 4

Die Funktion f ist differenzierbar, es gilt $f'(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x}$ (Kettenregel).

Die Funktion f ist auf einem Intervall (a, b) nicht monoton wachsend, falls es ein $x \in (a, b)$ gibt mit $f'(x) < 0$.

Es gilt $2\ln(x)\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$. ($x > 0$, da der Definitionsbereich von f durch $\mathbb{R}_> = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ gegeben ist.)

Daher ist f für alle Intervalle $(a, b) \subset \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ (streng) monoton wachsend, insbesondere für die Intervalle $(2, e)$, $(1, 2)$ und (e, ∞).

Umgekehrt ist f für das Intervall $(0, 1)$ streng monoton fallend. Also ist Antwort a) richtig.

Aufgabe 5 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Hinweise:

- Ableitung nach dem Exponenten:

$$\frac{da^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x \text{ für } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

- Regel von l'Hôpital:

  Falls $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g differenzierbar an der Stelle x_0 und $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Frage:

Wie lautet der Grenzwert des Bruchs

$$\frac{2^x - 3^x}{e^{2x} - e^{3x}}$$

für $x \to 0$?

a) Dieser Grenzwert existiert nicht.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{e^{2x}-e^{3x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{e^{2x}-e^{3x}} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{e^{2x}-e^{3x}} = \ln(3) - \ln(2)$

Lösungsweg zu Aufgabe 5

Siehe Tutoriumsblatt 9, Aufgabe 25.

Für $x = 0$ gilt $2^x - 3^x = 2^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ und $e^{2x} - e^{3x} = e^0 - e^0 = 0$. Damit ist die Regel von L'Hôpital anzuwenden:

Falls $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g differenzierbar an der Stelle x_0 und $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Hier ist $f(x) = 2^x - 3^x = e^{\ln(2^x)} - e^{\ln(3^x)} = e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)}$ und

$$f'(x) = \ln(2)e^{x\ln(2)} - \ln(3)e^{x\ln(3)} = \ln(2)2^x - \ln(3)3^x$$

und

$$f'(0) = \ln(2)2^0 - \ln(3)3^0 = \ln(2) - \ln(3)$$

Für den Zähler $g(x) = e^{2x} - e^{3x}$ gilt:

$$g'(x) = 2e^{2x} - 3e^{3x}, \text{ also } g'(0) = 2e^0 - 3e^0 = 2 - 3 = -1$$

Folglich gilt:

$$\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{-1} = \ln(3) - \ln(2)$$

Dies entspricht Antwort d).

Aufgabe 6 zu Kapitel 8 Univariate Optimierung

Gegeben sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x - 3\ln(x+1),\ x > -1$$

Wie lautet die Wendestelle von f?

a) Die Funktion f hat keine Wendestelle.

b) $x = 0$

c) $f'(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$

d) $f''(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

Lösungsweg zu Aufgabe 6

Falls $f''(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Für $f(x) = 3x - 3\ln(x+1)$ und $x > -1$ gilt:

$$f'(x) = 3 - 3\frac{1}{x+1} = 3 - 3(x+1)^{-1}$$

$$f''(x) = 3(x+1)^{-2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \text{ für alle } x > -1$$

Somit gibt es kein x mit $-1 < x < \infty$ und $f''(x) = 0$, die Funktion f hat keine Wendestelle.

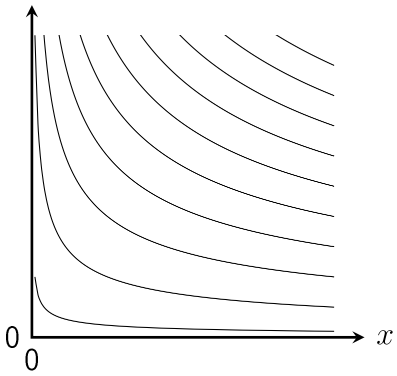
Aufgabe 7 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Gegeben sei die Funktion $u : \mathbb{R}^2_{\geq} \to \mathbb{R}$ mit

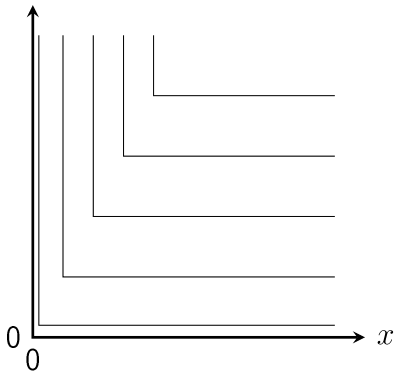
$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}},\ x,y \geq 0$$

Welches der folgenden Diagramme zeigt Höhenlinien dieser Funktion?

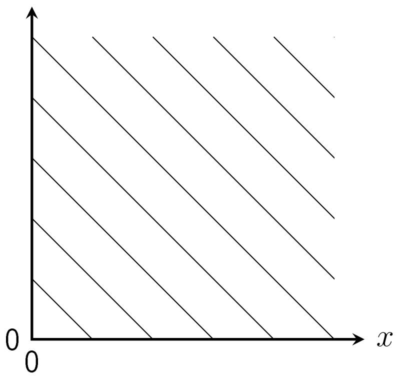
y Diagramm a)



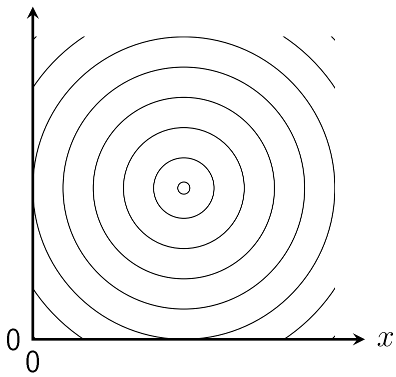
y Diagramm b)



y Diagramm c)



y Diagramm d)



Lösungsweg zu Aufgabe 7

Für eine beliebige Höhenlinie von u muss gelten: $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = \bar{u}$ für alle Punkte (x,y) entlang dieser Höhenlinie.

Diese Gleichung definiert y implizit als Funktion f von x. Die Steigung dieser Funktion f lässt sich durch implizites Differenzieren errechnen:

Leite beide Seiten der Gleichung

$$x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = \bar{u}$$

nach x ab, wobei $y = f(x)$ als Funktion von x interpretiert wird.

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot y' = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \Bigg/ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}\frac{y}{x}$$

Hierbei fällt auf, dass die Steigung der Höhenlinie von den Werten x und y abhängt, also nicht konstant ist. Diagramm c) scheidet deswegen aus.

Ferner ist die Steigung $-2\frac{y}{x} < 0$ für alle $x, y > 0$. Hiermit scheideen Diagramme b) und d) aus.

Hinweis:
Die Rechnung wird stark vereinfacht, wenn die Gleichung $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = \bar{u}$ zunächst äquivalent zu $x \cdot y^2 = \bar{u}^3$ umgeformt und erst danach abgeleitet wird:

$$y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{y^2}{2xy} = -\frac{1}{2}\frac{y}{x}$$

Aufgabe 8 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - 27$$

Welcher der angegebenen Punkte ist kein stationärer Punkt dieser Funktion?

a) $(x, y) = (-2, -2)$;

b) $(x, y) = (3, 3)$;

c) $(x, y) = (1, -1)$;

d) $(x, y) = (1, 1)$;

Lösungsweg zu Aufgabe 8

Für einen stationären Punkt (x_0, y_0) der Funktion f gilt $f_1'(x_0, y_0) = f_2'(x_0, y_0) = 0$.

Es gilt

$$f_1'(x, y) = 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$$

und

$$f_2'(x, y) = -3x^2 + 6xy - 3y^2 = -3(x^2 - 2xy + y^2) = -3(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Der Punkt $(x, y) = (1, -1)$ erfüllt als einziger die Bedingung $x = y$ nicht.

Lösungsvariante:

Die Funktion lässt sich schreiben als $f(x, y) = (x - y)^3$, womit die Ableitungen per Kettenregel direkt durch

$$f_1' = 3(x - y)^2 \text{ und } f_2' = -3(x - y)^2$$

gegeben sind.

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Multivariate Optimierung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^2 + 2x^2y + y^2$$

hat die stationäre Stelle $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Welche der folgenden Antworten ist richtig?

a) (x_0, y_0) ist eine Minimumstelle von f.

b) (x_0, y_0) ist eine Sattelstelle von f.

c) Keine der anderen drei Aussagen ist richtig.

d) (x_0, y_0) ist eine Maximumstelle von f.

Lösungsweg zu Aufgabe 9

Eine innere stationäre Stelle einer stetigen Funktion muss entweder eine Minimum-, Maximum- oder Sattelstelle sein. Damit entfällt direkt Antwort c).

Um die stationäre Stelle zu charakterisieren, muss die Hessematrix berechnet werden.

$$f_1'(x,y) = 4x + 4xy$$

$$f_2'(x,y) = 2x^2 + 2y$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{11}''(x,y) & f_{12}''(x,y) \\ f_{21}''(x,y) & f_{22}''(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

An der Stelle $(x_0, y_0) = (1, -1)$ gilt also

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 4-4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $f_{11}''(x_0,y_0) \cdot f_{22}''(x_0,y_0) = 0$ und $f_{12}''(x_0,y_0) \cdot f_{21}''(x_0,y_0) = 16$ und die Bedingung

$$f_{11}''(x_0,y_0) \cdot f_{22}''(x_0,y_0) \geq f_{12}''(x_0,y_0) \cdot f_{21}''(x_0,y_0)$$

ist verletzt. Somit ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt von f.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; x \cdot y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$17 \cdot x + 4 \cdot y = 204$$

Wie lautet die Lösung (x^*, y^*) dieses Problems?

a) $(x^*, y^*) = (68, 136)$

b) $(x^*, y^*) = (12, 51)$

c) $(x^*, y^*) = (4, 17)$

d) $(x^*, y^*) = (4, 34)$

Lösungsweg zu Aufgabe 10

Schnelle Lösung:

Durch Prüfung der Nebenbedingung kann ausgeschlossen werden:

a), da

$$17 \cdot 68 + 4 \cdot 136 > 204$$

b), da

$$17 \cdot 12 + 4 \cdot 51 > 204$$

c), da

$$17 \cdot 4 + 4 \cdot 17 = 2 \cdot 4 \cdot 17 = 136 < 204$$

Antwort d) erfüllt die Nebenbedingung:

$$17 \cdot 4 + 4 \cdot 34 = 4 \cdot (17 + 34) = 4 \cdot 51 = 204$$

Lösung nach Schema F:

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, y) = x \cdot y^2 - \lambda(17 \cdot x + 4 \cdot y - 204)$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$y^2 - \lambda \cdot 17 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{y^2}{17}$$

$$2xy - \lambda \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2xy}{4}$$

Daraus folgt:

$$\frac{y^2}{17} = \frac{2xy}{4} \Leftrightarrow y = 0 \vee y = x\frac{17}{2}$$

Nebenbedingung für $y = 0$:

$$17 \cdot x + 4 \cdot 0 = 204 \Rightarrow x = \frac{204}{17} = 12$$

Der Punkt $(x, y) = (12, 0)$ wird aber nicht aufgeführt (es handelt sich um eine Minimumstelle).

Nebenbedingung für $y = x\frac{17}{2}$:

$$17 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \frac{17}{2} = x \cdot 3 \cdot 17 = 204 \Leftrightarrow x = \frac{204}{3 \cdot 17} = 4$$

$$\Rightarrow y = 4 \cdot \frac{17}{2} = 34$$

Der Punkt $(x, y) = (4, 34)$ wird in Antwort d) aufgeführt.