

Mathematik
Variante A

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

22. September 2026

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

--	--	--	--	--	--

Nachname

Studiengang

Vorname

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 15 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren Sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich Ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren Sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten Sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren Sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten Sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten Sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder einen nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 27 von maximal 45 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒

Korrektur: ☐

Korrekturhinweis: Wenn Sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen Sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen Sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 15	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Sei $f(x) = x^3$ für $x > 0$, mit Umkehrfunktion g .

Wie lautet $g'(y)$?

a) $g'(y) = y^{1/3}$

b) $g'(y) = \frac{1}{3}y^{-1}$

c) $g'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$

d) $g'(y) = 3y^2$

Aufgabe 2 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Es sei $f(x) = 7x^4$ für $x > 0$.

Wie lautet die Elastizität $El_x f(x)$?

a) $El_x f(x) = 28x^3$

b) $El_x f(x) = 4$

c) $El_x f(x) = \frac{1}{4}$

d) $El_x f(x) = 7$

Aufgabe 3 zu Kapitel 8 Konkave und konvexe Funktionen

Seien f und g zwei konkave Funktionen auf einem Intervall I und seien $\alpha, \beta \geq 0$.

Welche der folgenden Aussagen gilt für alle konkaven Funktionen f und g auf I sowie für alle $\alpha, \beta \geq 0$?

- a) $\alpha f - \beta g$ ist konkav auf I .
- b) $\alpha f + \beta g$ ist konvex auf I .
- c) $\alpha f \cdot \beta g$ ist konkav auf I .
- d) $\alpha f + \beta g$ ist konkav auf I .

Aufgabe 4 zu Kapitel 9 Optimierung

Sei f zweimal differenzierbar und x_0 eine stationäre Stelle ($f'(x_0) = 0$).

Welche Bedingung ist hinreichend dafür, dass x_0 eine lokale Maximumstelle ist?

- a) $f''(x_0) < 0$
- b) $f'(x_0) \neq 0$
- c) $f''(x_0) = 0$
- d) $f''(x_0) > 0$

Aufgabe 5 zu Kapitel 10 Integration

Wie lautet das unbestimmte Integral $\int x^{-3} dx$?

a) $-4x^{-3} + C$

b) $x^{-4} + C$

c) $-\frac{1}{2}x^{-2} + C$

d) $-3x^{-2} + C$

Aufgabe 6 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Ist das Produkt $\mathbf{AB}$ zweier Matrizen $\mathbf{A}$ der Ordnung 3×2 und $\mathbf{B}$ der Ordnung 2×5 definiert und welche Ordnung hat es?

- a) Das Produkt $\mathbf{AB}$ ist definiert und hat die Ordnung 3×2 .
- b) Das Produkt $\mathbf{AB}$ ist definiert und hat die Ordnung 3×5 .
- c) Das Produkt $\mathbf{AB}$ ist nicht definiert.
- d) Das Produkt $\mathbf{AB}$ ist definiert und hat die Ordnung 2×2 .

Aufgabe 7 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$ -Matrizen.

Wie lautet $(\mathbf{AB})^{-1}$?

a) $(\mathbf{AB})'$

b) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

c) $\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}$

d) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Aufgabe 8 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von t ist die Matrix A nicht invertierbar?

- a) $t = \frac{4}{3}$
- b) $t = -\frac{4}{3}$
- c) $t = 3$
- d) $t = -4$

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Für eine quadratische Matrix A gilt:

A ist genau dann invertierbar, wenn:

- a) alle Einträge in A positiv sind.
- b) A symmetrisch ist.
- c) $|A| \neq 0$.
- d) $|A| = 0$.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 5e^{xy}.$$

Wie lautet $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$?

- a) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2y^2.$
- b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2y + 5xe^{xy}.$
- c) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2 + 5x.$
- d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy + 5e^{xy}.$

Aufgabe 11 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Wie lautet der Gradient $\nabla f(x, y)$ einer differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$?

a) $\nabla f(x, y) = f''_{11}(x, y) + f''_{22}(x, y)$

b) $\nabla f(x, y) = (x, y)$

c) $\nabla f(x, y) = f'_1(x, y) \cdot f'_2(x, y)$

d) $\nabla f(x, y) = (f'_1(x, y), f'_2(x, y))$

Aufgabe 12 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Sei $z = f(x, y)$ mit $x = x(t)$ und $y = y(t)$ differenzierbar.

Wie lautet $\frac{dz}{dt}$ nach der Kettenregel?

a) $\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_2(x, y) \frac{dy}{dt}$

b) $\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$

c) $\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) \cdot f'_2(x, y)$

d) $\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) + f'_2(x, y)$

Aufgabe 13 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Sei $u(x, y)$ stetig differenzierbar mit $u'_1(x, y), u'_2(x, y) > 0$.

Was gilt entlang einer Höhenlinie $u(x, y) = c$ für die Steigung $\frac{dy}{dx}$?

a) $\frac{dy}{dx} = u'_1(x, y) + u'_2(x, y)$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_2(x, y)}{u'_1(x, y)}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_1(x, y)}{u'_2(x, y)}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{u'_1(x, y)}{u'_2(x, y)}$

Aufgabe 14 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Sei die Funktion f in einer Umgebung von (x_0, y_0) zweimal stetig differenzierbar und sei (x_0, y_0) ein stationärer Punkt von f .

Die Hessematrix von f am Punkt (x_0, y_0) sei

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Welche Aussage ist richtig?

- a) Keine der drei anderen Aussagen ist richtig.
- b) (x_0, y_0) ist eine lokale Maximumstelle.
- c) (x_0, y_0) ist eine Sattelstelle.
- d) (x_0, y_0) ist eine lokale Minimumstelle.

Aufgabe 15 zu Kapitel 18 Nebenbedingungen in Gleichheit

Seien f und g stetig differenzierbar und sei (x^*, y^*) eine lokale Minimumstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = c$, mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator λ^* .

Es gelte $\nabla g(x^*, y^*) \neq \mathbf{0}$.

Welche notwendige Bedingung erster Ordnung muss im Optimum zusätzlich zu $g(x^*, y^*) = c$ gelten?

a) $\nabla f(x^*, y^*) = \nabla g(x^*, y^*)$

b) $\nabla f(x^*, y^*) + \nabla g(x^*, y^*) = \mathbf{0}$

c) $f(x^*, y^*) = \lambda^* \cdot g(x^*, y^*)$

d) $\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \cdot \nabla g(x^*, y^*)$

Musterlösung zu Aufgabe 1

Anwendungen der Differentialrechnung

Aus $f(x) = x^3$ folgt für die Umkehrfunktion

$$g(y) = y^{1/3}.$$

Mit der Potenzregel ergibt sich

$$g'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}.$$

Daher ist Antwort c) richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 2

Elastizität

Die Elastizität ist definiert durch

$$El_x f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}.$$

Für $f(x) = 7x^4$ gilt

$$f'(x) = 28x^3.$$

Damit folgt

$$El_x f(x) = \frac{x \cdot 28x^3}{7x^4} = \frac{28x^4}{7x^4} = 4.$$

Daher ist Antwort **b)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 3

Konkave und konvexe Funktionen

Sind f und g konkave Funktionen auf I und gilt $\alpha, \beta \geq 0$, dann ist jede nichtnegative Linearkombination von f und g ebenfalls konkav. Daher gilt:

$$\alpha f + \beta g \text{ ist konkav auf } I.$$

Die übrigen Aussagen gelten nicht allgemein. Dies zeigen Gegenbeispiele, jeweils auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ mit $\alpha = \beta = 1$:

- Für Antwort a) wähle man

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g(x) = -x^2.$$

Beide Funktionen sind konkav. Es gilt jedoch

$$\alpha f - \beta g = 0 - (-x^2) = x^2.$$

Die Funktion x^2 ist konvex und nicht konkav. Antwort a) ist also nicht allgemein richtig.

- Für Antwort b) wähle man

$$f(x) = g(x) = -x^2.$$

Beide Funktionen sind konkav. Dann ist

$$\alpha f + \beta g = -x^2 - x^2 = -2x^2.$$

Die Funktion $-2x^2$ ist konkav und nicht konvex. Antwort b) ist also nicht allgemein richtig.

- Für Antwort c) wähle man

$$f(x) = g(x) = x.$$

Lineare Funktionen sind sowohl konkav als auch konvex. Es gilt aber

$$\alpha f \cdot \beta g = x \cdot x = x^2.$$

Die Funktion x^2 ist nicht konkav. Antwort c) ist also nicht allgemein richtig.

Daher ist Antwort **d)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 4

Optimierung in einer Variablen

Da x_0 stationär ist, gilt bereits $f'(x_0) = 0$. Der Test der zweiten Ableitung liefert:

$$f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ ist eine lokale Maximumstelle.}$$

Bei $f''(x_0) > 0$ liegt ein lokales Minimum vor. Für $f''(x_0) = 0$ ist keine Entscheidung möglich. Daher ist Antwort **a)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 5

Integration

Mit der Potenzregel

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

und $r = -3$ folgt:

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C.$$

Daher ist Antwort c) richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 6

Matrizenalgebra

Für ein Produkt

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$$

müssen die inneren Dimensionen übereinstimmen, also $n = p$ gelten.

Hier sind die Dimensionen 3×2 und 2×5 . Das Produkt ist somit definiert und hat die äußeren Dimensionen

$$\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}.$$

Daher ist Antwort **b)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 7

Inverse eines Matrixprodukts

Für invertierbare Matrizen gilt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Die Reihenfolge der Faktoren wird also umgekehrt. Zur Kontrolle:

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Daher ist Antwort **d)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 8

Determinanten und Invertierbarkeit

Eine quadratische Matrix ist genau dann nicht invertierbar, wenn ihre Determinante null ist. Es gilt:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & t \end{vmatrix} = 3t - 4.$$

Gesucht ist also

$$3t - 4 = 0.$$

Daraus folgt

$$t = \frac{4}{3}.$$

Daher ist Antwort **a)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 9

Invertierbarkeit quadratischer Matrizen

Für jede quadratische Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathbf{A} \text{ ist invertierbar} \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Daher ist Antwort c) richtig.

Die übrigen Antworten sind nicht allgemein richtig. Dies zeigen die folgenden Gegenbeispiele:

- Zu Antwort a): Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat ausschließlich positive Einträge. Es gilt jedoch

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Die Matrix ist also nicht invertierbar. Positive Einträge sind somit keine hinreichende Bedingung für Invertierbarkeit.

- Zu Antwort b): Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Ihre Determinante ist jedoch

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Damit ist die Matrix nicht invertierbar. Symmetrie ist also keine hinreichende Bedingung für Invertierbarkeit.

Musterlösung zu Aufgabe 10

Partielle Ableitungen

Gegeben ist

$$f(x, y) = 3x^2y^2 + 5e^{xy}.$$

Bei der Ableitung nach y wird x als Konstante behandelt:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) = 6x^2y.$$

Für den Exponentialterm wird die Kettenregel verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial y}(5e^{xy}) = 5e^{xy} \cdot x = 5xe^{xy}.$$

Somit gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x^2y + 5xe^{xy}.$$

Daher ist Antwort **b)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 11

Gradient

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mit zwei Variablen besteht aus ihren ersten partiellen Ableitungen:

$$\nabla f(x, y) = (f'_1(x, y), f'_2(x, y)).$$

Gleichwertig lautet die Darstellung:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

Daher ist Antwort **d)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 12

Mehrdimensionale Kettenregel

Da sowohl x als auch y von t abhängen, wird die mehrdimensionale Kettenregel verwendet:

$$\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_2(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

Genauer werden die partiellen Ableitungen dabei an der Stelle $(x(t), y(t))$ ausgewertet. Daher ist Antwort **a)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 13

Höhenlinien

Entlang einer Höhenlinie gilt

$$u(x, y) = c.$$

Da c konstant ist, folgt durch totale Differentiation:

$$u'_1(x, y) dx + u'_2(x, y) dy = 0.$$

Nach Division durch dx erhält man:

$$u'_1(x, y) + u'_2(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Da $u'_2(x, y) > 0$ ist, kann durch $u'_2(x, y)$ dividiert werden:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_1(x, y)}{u'_2(x, y)}.$$

Daher ist Antwort **c)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 14

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Die Hessematrix ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Für negative Definitheit einer symmetrischen 2×2 -Matrix muss der Eintrag der ersten Zeile und der ersten Spalte negativ und die Determinante positiv sein. Hier gilt:

$$-2 < 0$$

und

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0.$$

Die Hessematrix ist also negativ definit. Da der Punkt stationär ist, liegt ein lokales Maximum vor. Daher ist Antwort **b)** richtig.

Musterlösung zu Aufgabe 15

Lagrange-Multiplikatoren

Für das Problem

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

unter der Gleichheitsnebenbedingung

$$g(x,y) = c$$

gilt bei erfüllter Regularitätsbedingung

$$\nabla g(x^*, y^*) \neq \mathbf{0}$$

die notwendige Bedingung erster Ordnung

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*).$$

Zusätzlich muss die Nebenbedingung

$$g(x^*, y^*) = c$$

erfüllt sein. Daher ist Antwort **d)** richtig.

Lösungstabelle

Aufgabe	Antwort	Aufgabe	Antwort	Aufgabe	Antwort
1	c)	6	b)	11	d)
2	b)	7	d)	12	a)
3	d)	8	a)	13	c)
4	a)	9	c)	14	b)
5	c)	10	b)	15	d)