

Musterlösung zur Klausur
Mathematik
vom 18.2.2026 (60 Minuten)

Lösung zu Aufgabe 1

Implizites Differenzieren:

Betrachte y als Funktion von x und leite beide Seiten der Gleichung nach x ab. Forme die resultierende Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ um.

Ableiten nach x :

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2y - 2x \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

Umformen nach $\frac{dy}{dx}$:

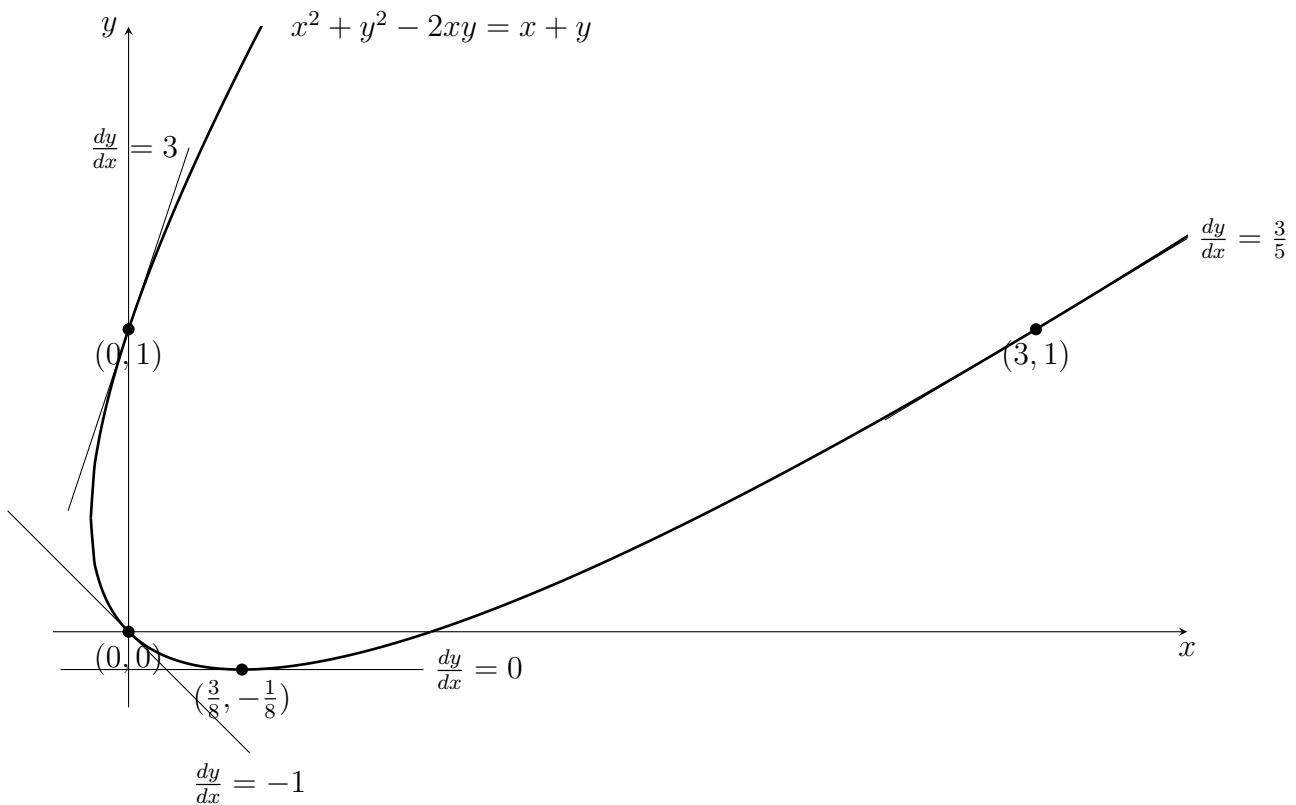
$$\frac{dy}{dx} (2y - 2x - 1) = 1 - 2x + 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x + 2y}{-1 - 2x + 2y} \quad (\text{für } 2(x - y) \neq -1)$$

Diese Ableitung ist gleich -1, falls

$$\frac{1 - 2x + 2y}{-1 - 2x + 2y} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2x + 2y = 1 + 2x - 2y \Leftrightarrow x = y$$

Setze $x = y$ in Originalgleichung $x^2 + y^2 - 2xy = x + y$ ein:

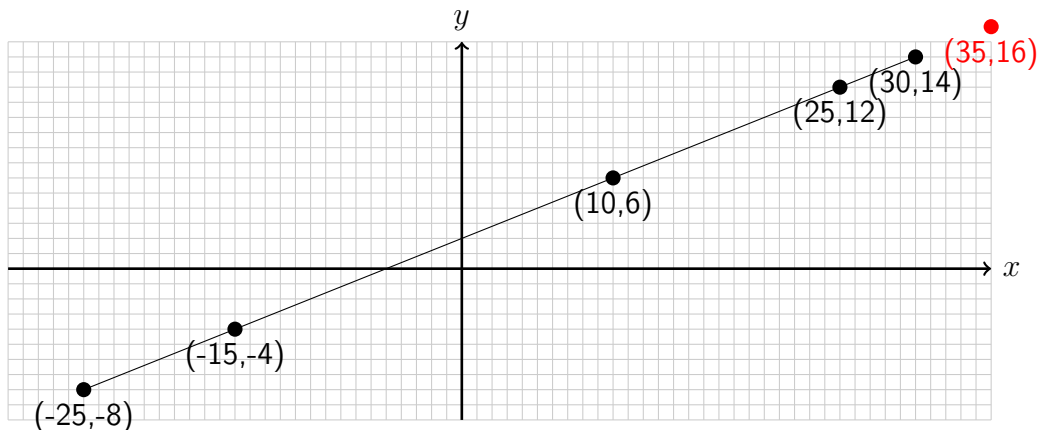
$$x^2 + x^2 - 2x^2 = x + x \Leftrightarrow 0 = 2x \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$



Lösung zu Aufgabe 2

Der Punkt (x, y) ist eine Konvexkombination der Punkte (x_A, y_A) und (x_B, y_B) , falls es ein λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gibt, sodass $x = \lambda x_A + (1 - \lambda)x_B$ und $y = \lambda y_A + (1 - \lambda)y_B$.

Alle Konvexkombinationen von (x_A, y_A) und (x_B, y_B) liegen auf der Verbindungslinie zwischen diesen beiden Punkten:



Der Punkt $(35, 16)$ liegt als einziger nicht auf dieser Verbindungslinie.

Der jeweilige Wert λ berechnet sich wie folgt:

$$x = \lambda x_A + (1 - \lambda)x_B = x_B + \lambda(x_A - x_B) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}$$

und analog

$$\lambda = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$$

Nur wenn in beiden Fällen der gleiche Wert für λ berechnet wird und dieser zwischen null und eins liegt, ist der Punkt (x, y) eine Konvexkombination.

Für $(x, y) = (35, 16)$:

$$\lambda = \frac{35 - 30}{-25 - 30} = \frac{5}{-55} = -\frac{1}{11}$$
$$\lambda = \frac{16 - 14}{-8 - 14} = \frac{2}{-22} = -\frac{1}{11}$$

Es ergibt sich zwar der gleiche Wert für λ , aber dieser ist außerhalb von $[0, 1]$.

Für $(x, y) = (-15, -4)$:

$$\lambda = \frac{-15 - 30}{-25 - 30} = \frac{-45}{-55} = \frac{9}{11}$$
$$\lambda = \frac{-4 - 14}{-8 - 14} = \frac{-18}{-22} = \frac{9}{11}$$

Für $(x, y) = (10, 6)$:

$$\lambda = \frac{10 - 30}{-25 - 30} = \frac{-20}{-55} = \frac{4}{11}$$
$$\lambda = \frac{6 - 14}{-8 - 14} = \frac{-8}{-22} = \frac{4}{11}$$

Für $(x, y) = (25, 12)$:

$$\lambda = \frac{25 - 30}{-25 - 30} = \frac{-5}{-55} = \frac{1}{11}$$
$$\lambda = \frac{12 - 14}{-8 - 14} = \frac{-2}{-22} = \frac{1}{11}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Wir untersuchen die Extremstellen der gegebenen Funktionen:

1. $h(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$: Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel. Das Minimum liegt bei $x = -3$.
2. $g(x) = (x-3)(x+3)$: Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel. Das Minimum liegt bei $x = 0$.
3. $i(x) = \ln(x+3)$: Die Logarithmusfunktion ist auf Ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend. Sie besitzt keine Extremstellen.
4. $f(x) = \frac{5}{(x+3)^2+1}$: Da der Zähler konstant ist, liegt ein Maximum dort vor, wo der Nenner minimal wird. Das ist bei $x = -3$.

f und h haben genau eine Extremstelle bei $x = -3$.

Lösung zu Aufgabe 4

Der Gewinn $\pi(x)$ berechnet sich aus Erlös $E(x)$ minus Kosten $C(x)$.

Da der Preis pro Stück 12 Euro beträgt, ist die Erlösfunktion $E(x) = 12x$.

Damit lautet die Gewinnfunktion:

$$\pi(x) = 12x - (ax^2 + bx) = -ax^2 + 12x - bx$$

Notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum ist, dass die erste Ableitung null ist ($\pi'(x) = 0$).

Wir leiten nach x ab:

$$\pi'(x) = 12 - 2ax - b$$

Da das Maximum bei $x^* = 10$ liegt, setzen wir $x = 10$ ein und setzen die Gleichung gleich null:

$$0 = 12 - 2a \cdot 10 - b$$

$$0 = 12 - 20a - b$$

Umformen nach b liefert die gesuchte Beziehung:

$$b = 12 - 20a$$

Lösung zu Aufgabe 5

Die Stammfunktion der Funktion $f(x) = 4 - x^2$ lautet

$$F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 4 = x^2 \Leftrightarrow |x| = 2$$

Die Fläche zwischen dem Graph von f und der positiven x -Achse lautet:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3}2^3 + C - 4 \cdot 0 + \frac{1}{3}0^3 - C = 8 - \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 6

Da der Grad des Zählerpolynoms größer ist als der des Nennerpolynoms, führen wir zunächst eine Polynomdivision durch.

Rechnung: $(x^3 + 6x^2 + 5x - 6) : (x + 2)$

- $x^3 : x = x^2$. Rückmultiplikation: $x^2 \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2$.
- Subtraktion: $(x^3 + 6x^2) - (x^3 + 2x^2) = 4x^2$. Rest herunterholen: $4x^2 + 5x$.
- $4x^2 : x = 4x$. Rückmultiplikation: $4x \cdot (x + 2) = 4x^2 + 8x$.
- Subtraktion: $(4x^2 + 5x) - (4x^2 + 8x) = -3x$. Rest herunterholen: $-3x - 6$.
- $-3x : x = -3$. Rückmultiplikation: $-3 \cdot (x + 2) = -3x - 6$.
- Subtraktion ergibt Rest 0.

Ergebnis der Division:

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5x - 6}{x + 2} = x^2 + 4x - 3$$

Nun integrieren wir das Ergebnis:

$$\int (x^2 + 4x - 3) dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

Lösung zu Aufgabe 7

Die Funktion

$$f(x, y) = xy^2$$

ist homogen vom Grad 3, es gilt

$$f(tx, ty) = (tx)(ty)^2 = t^3 xy^2$$

Für $t = 3$ bedeutet dies $f(3x, 3y) = 27xy^2$.

Für (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 10$ gilt demnach $f(3x_0, 3y_0) = 27 \cdot 10 = 270$

Lösung zu Aufgabe 8

Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (x - 5)^2 + (y + 3)^2$$

lauten

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2(x - 5) \text{ und } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2(y + 3)$$

Die Bedingungen erster Ordnung implizieren, dass die einzige stationäre Stelle $(x_0, y_0) = (5, -3)$ lautet.

Die Hessematrix der Funktion lautet

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Bedingungen für Konvexität sind erfüllt. Demnach ist die einzige stationäre Stelle eine Minimumstelle.

Die Aussage „Die Funktion besitzt keine Maximumstelle.“ ist wahr, alle anderen sind falsch.

Lösung zu Aufgabe 9

Bestimmung der stationären Stelle, zuerst partielle Ableitung nach x :

$$f_x(x, y; a) = 6ax - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 6ax = 2 \Rightarrow x^* = \frac{2}{6a} = \frac{1}{3a}$$

Partielle Ableitung nach y :

$$f_y(x, y; a) = 6y - a \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 6y = a \Rightarrow y^* = \frac{a}{6}$$

Einsetzen der stationären Stelle $(x^*, y^*) = (\frac{1}{3a}, \frac{a}{6})$ in die Ursprungsfunktion $f(x, y, a)$:

$$f^*(a) = 3a \cdot \left(\frac{1}{3a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3a}\right) + 3 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{a}{6}\right)$$

Vereinfachen der Terme:

$$f^*(a) = 3a \cdot \frac{1}{9a^2} - \frac{2}{3a} + 3 \cdot \frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{6}$$

$$f^*(a) = \frac{1}{3a} - \frac{2}{3a} + \frac{a^2}{12} - \frac{2a^2}{12}$$

$$f^*(a) = -\frac{1}{3a} - \frac{a^2}{12}$$

Lösung zu Aufgabe 10

$$\min_{x,y} (x-5)^2 + (y+3)^2 \text{ u.d.B. } x+y=0$$

$$\mathcal{L}(x,y) = (x-5)^2 + (y+3)^2 - \lambda(x+y-0)$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\mathcal{L}'_1(x,y) = 2(x-5) - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 2(x-5)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = 2(y+3) - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 2(y+3)$$

$$\Rightarrow 2(x-5) = 2(y+3) \Leftrightarrow x = y+8$$

Nebenbedingung:

$$x+y=0$$

Mit $x = y+8$: $y+8+y=0 \Leftrightarrow y=-4 \Rightarrow x=4$

Alternativer Lösungsweg:

Substituiere $y = -x$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (x-5)^2 + (-x+3)^2$$

BEO:

$$2(x-5) + 2(-x+3)(-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-10+2x-6=0 \Leftrightarrow 4x-16=0 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=-4$$