Mathematik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 4. Februar 2025

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nachname ______________

Studiengang ______________ Vorname ______________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 14 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 26 von maximal 42 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ für } x > -1$$

Sei $\Delta x \neq 0$ und $\Delta x \neq -x - 1$.

Wie lautet der Differenzenquotient nach Vereinfachung?

a) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{(x+\Delta x+1)(x+1)}$

b) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x+1)(x+1)}$

d) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = (x+\Delta x+1)(x+1)$

Aufgabe 2 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ für } x > -1$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Ableitung der Funktion f lautet $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

b) Der Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f.

c) Die Funktion f ist strikt monoton fallend auf $(-1, \infty)$.

d) Die Ableitung der Funktion f lautet $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

Aufgabe 3 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Es sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ für } x > 0$$

Welcher der folgenden Ausdrücke entspricht der Elastizität von f?

a) $El_x f(x) = \frac{1}{2}$

b) $El_x f(x) = -\frac{1}{2}$

c) $El_x f(x) = -\sqrt{x}$

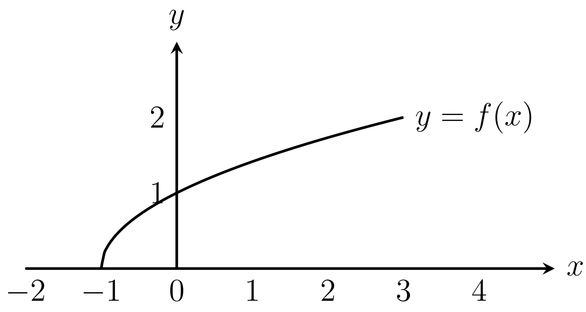
d) $El_x f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 4 zu Kapitel 8 Konkave und konvexe Funktionen

Es sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ für } x > -1$$

Das folgende Diagramm bildet den Graphen dieser Funktion ab:



Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Funktion f ist konvex auf $(-1, \infty)$.

b) Die Funktion f ist konkav auf $(-1, \infty)$.

c) Die Funktion f ist strikt konkav auf $(-1, \infty)$.

d) Die zweite Ableitung von f lautet $f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$ für $x > -1$.

Aufgabe 5 zu Kapitel 9 Optimierung

Es sei die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ für } 0 < x \leq 1$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Funktion f besitzt eine Maximumstelle in $(0,1]$.

b) Die Funktion f besitzt eine Minimumstelle in $(0,1]$.

c) Die Funktion f besitzt keine Maximumstelle in $(0,1]$.

d) Es gilt $f(x) \leq 1$ für alle $0 < x \leq 1$.

Aufgabe 6 zu Kapitel 9 Optimierung

Die Funktion f sei für $0 \leq x \leq 4$ definiert durch

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

Wie lautet die Maximumstelle x^* dieser Funktion auf $[0, 4]$?

a) $x^* = 0$

b) $x^* = 3$

c) $x^* = 4$

d) Keine der angegebenen Stellen ist eine Maximumstelle von f auf $[0, 4]$.

Aufgabe 7 zu Kapitel 10 Integration

Welcher der folgenden Ausdrücke ist ein unbestimmtes Integral von $(x-2)^2$?

a) $F(x) = x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)$

b) $F(x) = x\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\right)$

c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$

Aufgabe 8 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Gegeben sei die Gleichung

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Koeffizienten seien.

Welche reellen Zahlen a und b erfüllen obige Gleichung?

a) Es gibt keine reellen Zahlen a und b, die obige Gleichung erfüllen.

b) $a = 3$ und $b = -1$

c) $a = \frac{7}{2}$ und $b = 1$

d) $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Die Matrix A sei wie folgt definiert:

$$A = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 4 & 2-x \end{pmatrix},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ ein Koeffizient ist.

Für welchen Wert von x besitzt A eine Inverse?

a) $x = 2$

b) $x = 0$

c) $x = 4$

d) Die Matrix A besitzt für keine Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Inverse.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Wie lautet die Hessematrix der folgenden Funktion?

$$f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127$$

a) $f''(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\nabla f(x,y) = \binom{-4x+4y+7}{4x-6y-7}$

c) $f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

d) Die Funktion f besitzt keine Hessematrix.

Aufgabe 11 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127 \text{ , für } x, y \in \mathbb{R}$$

Welche Steigung y' hat eine Höhenlinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$?

a) $y' = 1$

b) $y' = -2$

c) $y' = 3$

d) Die Steigung der Höhenlinie kann an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht berechnet werden.

Aufgabe 12 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127 \ , \text{ für } x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen in Bezug auf die Hessematrix $f''(x, y)$ der Funktion f ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ wahr?

a) $f''(x, y)$ ist negativ definit.

b) $f''(x, y)$ ist indefinit.

c) $f''(x, y)$ ist positiv definit.

d) $f''(x, y)$ ist positiv semidefinit.

Aufgabe 13 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127 \ , \text{ für } x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist in Bezug auf die Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ wahr?

a) (x_0, y_0) ist keine Extremstelle von f.

b) (x_0, y_0) ist eine Maximumstelle von f.

c) (x_0, y_0) ist eine Minimumstelle von f.

d) (x_0, y_0) ist ein Sattelpunkt von f.

Aufgabe 14 zu Kapitel 18 Nebenbedingungen in Gleichheit

Wie lautet die Lösung (x^*, y^*) des folgenden Maximierungsproblems?

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \; -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127 \text{ u.d.B } x + y = 4$$

a) $(x^*, y^*) = (3, 1)$

b) $(x^*, y^*) = (2, 2)$

c) $(x^*, y^*) = (1, 3)$

d) $(x^*, y^*) = (4, 0)$

Lösung zu Aufgabe 1

Der Differenzenquotient einer Funktion f ist definiert durch

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

wobei $\Delta x \neq 0$ derart, dass $f(x+\Delta x)$ definiert ist.

Für $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ergibt sich

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x+1}-\frac{1}{x+1}}{\Delta x}=\frac{\frac{x+1-x-\Delta x-1}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Es gilt $f'(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=((x+1)^{-1})'=-1\cdot(x+1)^{-2}=-\frac{1}{(x+1)^2}\neq-\frac{1}{x^2}$.

Es gilt $f(0)=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1\checkmark$.

Mit $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$ für alle $x>-1$ ist f strikt monoton fallend.

Lösung zu Aufgabe 3

Die Formel für die Elastizität einer Funktion lautet

$$El_x f(x)=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$$

Mit $f(x)=\sqrt{x}$ und $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x>0$ folgt:

$$El_x f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{x}{x}=\frac{1}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Die zweite Ableitung der Funktion f lautet

$$f''(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)''=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)'=\left(\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}<0 \text{ für } x>-1$$

Daher ist die Funktion f strikt konkav für $x>-1$. Aus strikter Konkavität folgt (schwache) Konkavität.

Lösung zu Aufgabe 5

Da der Definitionsbereich $(0,1]$ halboffen ist, gilt der Extremwertsatz nicht und die Funktion f muss nicht notwendig ein Extremum auf $(0,1]$ besitzen.

Wegen $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$ für $0<x\leq 1$ ist die Funktion streng monoton fallend. Deswegen existieren keine inneren Extremstellen und sie besitzt ein striktes Minimum am rechten Rand bei $x^{\text{Min}}=1$ mit $f(1)=\frac{1}{2}<f(x)$ für alle $0<x<1$, weswegen $x=1$ nicht gleichzeitig eine Maximumstelle ist. Da es keine weiteren Randpunkte gibt, gibt es keine Maximumstelle.

Wegen $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{0+1}=1$ und strikter Monotonie gilt $1>f(x)$ für alle $0<x\leq 1$ und damit auch $1\geq f(x)$ für alle $0<x\leq 1$.

Lösung zu Aufgabe 6

Wegen $[0,4]$ abgeschlossen und beschränkt und f stetig muss eine Maximumstelle von f auf $[0,4]$ existieren.

Es gilt $f'(x)=2x-6\stackrel{!}{=}0\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$.

Als Kandidaten für Maximumstellen kommen nun die beiden Randpunkte und der innere stationäre Punkt, also $\{0,3,4\}$ infrage.

Es gilt $f(0)=0^2-6\cdot 0+9=9$, $f(3)=3^2-6\cdot 3+9=0$ und $f(4)=4^2-6\cdot 4+9=1$.

Daher ist $x = 0$ die Maximumstelle.

Alternativ: Wegen $f''(x) = 2 > 0$ ist die Funktion strikt konvex und innere stationäre Stellen sind Minimumstellen. Daher muss das Maximum auf dem Rand liegen.

Lösung zu Aufgabe 7

Lösungsweg A: (Berechnung des Integrals von $(x-2)^2$)

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \int (x-2)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 - 4\frac{1}{2}x^2 + 4x = x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)$$

Lösungsweg B: (Berechnung von $F'(x)$)

$$\left(x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right)' = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Lösung zu Aufgabe 8

Lösung durch Aufstellen eines Gleichungssystems:

a und b müssen erfüllen:

$$\begin{aligned}
a \cdot 2 + b \cdot (-4) &= 3 \\
a \cdot (-1) + b \cdot 2 &= -5 \\
&\Leftrightarrow \\
2a &= 3 + 4b \\
2b + 5 &= a \\
&\Leftrightarrow \\
2a &= 3 + 4b \\
2b + 5 &= \frac{3}{2} + 2b \\
\Leftrightarrow 5 &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Widerspruch. Es gibt also keine reellen Zahlen a und b, die obige Gleichungen erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 9

Die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 4 & 2-x \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|A| = (2-x)^2 - 4 = (2-x-2)(2-x+2) = -x(4-x)$$

Die Determinante ist also gleich null, falls $x = 0$ oder falls $x = 4$. In diesen Fällen besitzt A keine Inverse. In allen anderen Fällen, insbesondere für $x = 2$ besitzt A eine Inverse. Für $x = 2$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 10

$$f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127$$

1. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_1'(x,y) &= -4x + 4y + 7 \\
f_2'(x,y) &= 4x - 6y - 7
\end{aligned}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f''_{11} &= -4 \\ f''_{12} &= 4 \\ f''_{21} &= 4 \\ f''_{22} &= -6 \end{aligned}$$

Hessematrix:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 11

$$f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127$$

1. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'_1(x,y) &= -4x + 4y + 7 \\ f'_1(x_0,y_0) &= 7 \\ f'_2(x,y) &= 4x - 6y - 7 \\ f'_2(x_0,y_0) &= -7 \end{aligned}$$

Steigung $y' = -\frac{f'_1(x_0,y_0)}{f'_2(x_0,y_0)} = -\frac{7}{-7} = 1$

Lösung zu Aufgabe 12

Die Hessematrix lautet:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Hessematrix lautet $|f''(x,y)| = (-4) \cdot (-6) - 4 \cdot 4 = 24 - 16 = 8 > 0$. Wegen $f''_{11}(x,y) = -4 < 0$ ist die Hessematrix negativ definit für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 13

$$f(x,y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127$$

1. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'_1(x,y) &= -4x + 4y + 7 \\ f'_1(x_0,y_0) &= 7 \\ f'_2(x,y) &= 4x - 6y - 7 \\ f'_2(x_0,y_0) &= -7 \end{aligned}$$

Daher ist der innere Punkt (x_0, y_0) nicht stationär und kann keine Extremstelle von f sein.

Lösung zu Aufgabe 14

Variante: Einsetzen

Alle Antwortmöglichkeiten erfüllen die Nebenbedingung $x + y = 4$.

Es gilt:

- $(x^*, y^*) = (3,1) \rightarrow -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 3 - 7 \cdot 1 + 127 = -18 + 12 - 3 + 21 - 7 + 127 = 132$
- $(x^*, y^*) = (2,2) \rightarrow -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 7 \cdot 2 + 127 = -8 + 16 - 12 + 127 = 123$

- $(x^*, y^*) = (1,3) \rightarrow -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 7 \cdot 3 + 127 = 106$
- $(x^*, y^*) = (4,0) \rightarrow -2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 4 - 7 \cdot 0 + 127 = 123$

Variante Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127 - \lambda(x+y-4)$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{array}{rcl}
-4x + 4y + 7 - \lambda & = & 0 \\
4x - 6y - 7 - \lambda & = & 0 \\
x + y - 4 & = & 0 \\
& \Leftrightarrow & \\
-4x + 4y + 7 & = & 4x - 6y - 7 \\
4x - 6y - 7 - \lambda & = & 0 \\
x & = & 4 - y \\
& \Leftrightarrow & \\
10y + 14 & = & 8x = 8(4-y) = 32 - 8y \\
4x - 6y - 7 - \lambda & = & 0 \\
x & = & 4 - y \\
& \Leftrightarrow & \\
18y & = & 18 \\
4x - 6y - 7 - \lambda & = & 0 \\
x & = & 4 - y \\
& \Rightarrow & \\
y & = & 1 \\
x & = & 3
\end{array}$$

Variante Tangentialbedingung:

$$y' = -\frac{-4x + 4y + 7}{4x - 6y - 7} \stackrel{!}{=} -1 \Leftrightarrow -4x + 4y + 7 = 4x - 6y - 7 \Leftrightarrow -8x + 10y = -14$$

Prüfe für die vier Antwortmöglichkeiten:

- $(3,1)$: $-24 + 10 = -14 \checkmark$
- $(2,2)$: $-16 + 20 \neq -14$
- $(1,3)$: $-8 + 30 \neq -14$
- $(4,0)$: $-32 \neq -14$