Variante **A**

Mathematik

Technische Universität Dortmund — Fakultät Wirtschaftswissenschaften — 14. Februar 2024

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ______________________

Studiengang ______________________ Vorname ______________________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = (2 - x)^2, \ x \in \mathbb{R}$$

Der Differenzenquotient von f sei für $x, \Delta x \in \mathbb{R}$, $\Delta x \neq 0$ gegeben durch:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Welcher der folgenden Ausdrücke entspricht dem Differenzenquotient, nachdem dieser vereinfacht wurde?

a) $2(x - 2) + \Delta x$

b) $2 - x + \Delta x$

c) $\frac{(2-x)^2}{\Delta x} - 2(2 - x) + \Delta x$

d) $\frac{1}{2(2-x)}$

Aufgabe 2 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ mit $x > 0$ gilt:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$
- $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$
- $\ln(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}$ existiert nicht.

c) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x}$

d) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = e$

Aufgabe 3 zu Kapitel 8 Univariate Optimierung

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 6(3 - x)^2 + 5$$

definiert.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) $x = 5$ ist eine Extremstelle von f.

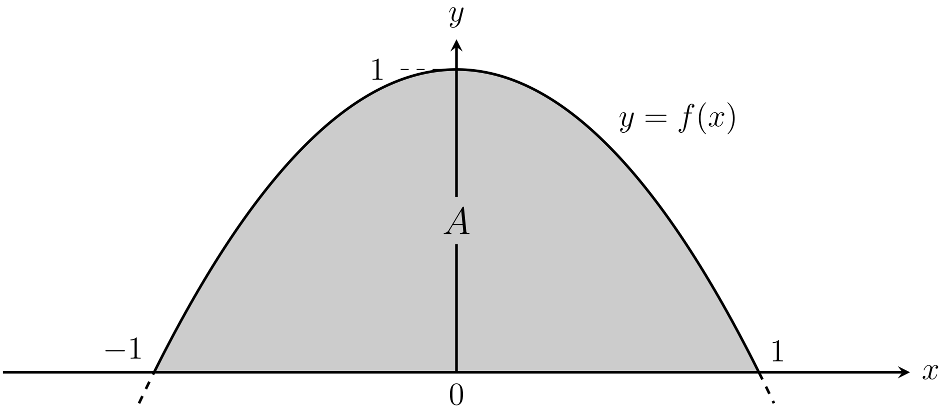
b) $x = 3$ ist die einzige Minimumstelle von f.

c) $f(x) \geq 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$

d) Der Minimalwert von f ist 5.

Aufgabe 4 zu Kapitel 9 Integralrechnung

Das folgende Diagramm stellt den Graphen der Funktion $f(x) = 1 - x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ dar und die Fläche A.



Wie groß ist die Fläche $A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx$?

a) $A = 4/3$

b) $A = \pi/2$

c) $A = 1$

d) $A = 2/3$

Aufgabe 5 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Es sei $||\binom{x}{y}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Vektors $\binom{x}{y}$.

Wie lautet die partielle Ableitung dieser Größe nach x für $\binom{x}{y} = \binom{3}{4}$?

a) $\frac{\partial ||\binom{x}{y}||}{\partial x} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{\partial ||\binom{x}{y}||}{\partial x} = 0$

c) $\frac{\partial ||\binom{x}{y}||}{\partial x} = 1$

d) $\frac{\partial ||\binom{x}{y}||}{\partial x} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 6 zu Kapitel 12 Komparative Statik

Es sei $||\binom{x}{y}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Vektors $\binom{x}{y}$.

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ||\binom{x}{y}||$ homogen und falls ja von welchem Grad?

a) f ist homogen vom Grad 1.

b) f ist homogen vom Grad 2.

c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{2}$.

d) f ist nicht homogen.

Aufgabe 7 zu Kapitel 13 Multivariate Optimierung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) = (3x - 5y)^2, \; x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Der Punkt $(x, y) = (3, 5)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f.

b) Der Punkt $(x, y) = (5, 3)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f.

c) Der Punkt $(x, y) = (-15, -9)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f.

d) Die Funktion f hat unendlich viele stationäre Punkte.

Aufgabe 8 zu Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen

Es sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} (x+1)\cdot(y-2) \text{ u.d.B. } 2x+3y=16$$

Es sei angenommen, dass dieses Problem eine Maximumstelle besitzt.

Welcher der folgenden Punkte ist diese Maximumstelle?

a) $(x,y)=(2,4)$

b) $(x,y)=(-1,6)$

c) $(x,y)=(1,6)$

d) $(x,y)=(5,2)$

Aufgabe 9 zu Kapitel 15 Matrizen und Vektoralgebra

Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wie lautet das Produkt $A \cdot B$?

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10 zu Kapitel 16 Determinanten und inverse Matrizen

Es sei die Matrix $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Determinante der Matrix P ist gleich null.

b) Die Matrix P ist positiv definit.

c) Die beiden Spaltenvektoren $\binom{2}{3}$ und $\binom{3}{8}$ sind linear unabhängig.

d) Die Matrix P hat eine Inverse.

Lösung zu Aufgabe 1

Der Differenzenquotient von $f(x) = (2-x)^2$ lautet

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{(2-x-\Delta x)^2-(2-x)^2}{\Delta x}\\ &= \frac{(2-x)^2-2(2-x)\Delta x+(\Delta x)^2-(2-x)^2}{\Delta x}\\ &= \frac{-2(2-x)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\ &= -2(2-x)+\Delta x\\ &= 2(x-2)+\Delta x\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Variante 1:

Mit $\ln(1) = 0$ gilt $\lim_{\Delta x=0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\Delta x)-\ln(1)}{\Delta x} = \frac{d\ln(x)}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$.

Variante 2:

Mit $\ln(1+\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$ ist l'Hopital anzuwenden:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\frac{d\ln(1+\Delta x)}{d\Delta x}\Big|_{\Delta x=0}}{\frac{d\Delta x}{d\Delta x}\Big|_{\Delta x=0}} = \frac{\frac{1}{1+\Delta x}\Big|_{\Delta x=0}}{1} = 1$$

Lösung zu Aufgabe 3

Eine Extremstelle (alle Punkte in $\mathbb{R}$ sind innere Punkte von $\mathbb{R}$) erfüllt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -12(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Der einzige Kandidat für eine Extremstelle lautet also $x = 3$.

Damit ist $x = 5$ keine Extremstelle von f. (Es gilt auch $f(4) < f(5) < f(6)$.)

Mit $f''(x) = 12 > 0$ ist f streng konvex und alle stationären Punkte sind Minimumstellen. Da $x = 3$ die einzige stationäre Stelle ist, ist $x = 3$ auch die einzige Minimumstelle.

Es gilt $f(3) = 6(3-3)^2 + 5 = 5$. Da $x = 3$ eine Minimumstelle ist, gilt $f(x) \geq f(3) = 5$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt auch $f(x) \geq 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Stammfunktion von $f(x) = 1 - x^2$ lautet $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3$. Da $f(x) \geq 0$ für $x \in [-1, 1]$, ist die Fläche A gegeben durch

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3}1^3 - (-1 - \frac{1}{3}(-1)^3) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 5

Mit der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mit $\binom{x}{y} = \binom{3}{4}$ gilt $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$ und $\sqrt{x^2+y^2} = 5$. Also folgt:

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{5}$$

Lösung zu Aufgabe 6

Es gilt für $t > 0$:

$$f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = \sqrt{t^2(x^2+y^2)} = t\sqrt{x^2+y^2} = tf(x,y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Also ist f homogen vom Grad 1.

Lösung zu Aufgabe 7

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 6(3x-5y) = 0 \Leftrightarrow 3x = 5y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= -10(3x-5y) = 0 \Leftrightarrow 3x = 5y \end{aligned}$$

Für den Punkt $(x, y) = (3, 5)$ gilt $3x = 9 \neq 15 = 5y$. Daher ist $(x, y) = (3, 5)$ nicht stationär.
Für den Punkt $(x, y) = (5, 3)$ gilt $3x = 15 = 5y$. Daher ist $(x, y) = (5, 3)$ stationär.
Für den Punkt $(x, y) = (-15, -9)$ gilt $3x = -45 = 5y$. Daher ist $(x, y) = (-15, -9)$ stationär.
Die Menge der unendlich vielen stationären Punkte lautet $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x = 5t, y = 3t, t \in \mathbb{R}\}$.

Lösung zu Aufgabe 8

Die Lagrangefunktion zu diesem Problem lautet

$$\mathcal{L}(x, y) = (x+1)(y-2) - \lambda(2x + 3y - 16)$$

Eine Maximumstelle erfüllt notwendig die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = y - 2 - 2\lambda &\overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = 2 + 2\lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = x + 1 - 3\lambda &\overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = -1 + 3\lambda \\ 2x + 3y &\overset{!}{=} 16 \end{aligned}$$

Es folgt

$$2x + 3y = -2 + 6\lambda + 6 + 6\lambda = 4 + 12\lambda \overset{!}{=} 16 \Leftrightarrow 12\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Damit gilt $y = 2 + 2 = 4$ und $x = -1 + 3 = 2$.

Lösung zu Aufgabe 9

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 10

$$|P| = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 16 - 9 = 7 > 0$$
$$|P_1| = 2 > 0$$

$\Rightarrow |P| \neq 0$ und P positiv definit.

Es gilt $P\mathsf{x} = \binom{2x_1+3x_2}{3x_1+8x_2} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \wedge x_1 = -\frac{8}{3}x_2$, also $-\frac{3}{2}x_2 = -\frac{8}{3}x_2 \Leftrightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Also sind die beiden Spalten von P linear unabhängig.

Mit $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$P^{-1}P = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$