Variante **A**

Mathematik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 15. Februar 2023

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________

Studiengang ____________ Vorname ____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

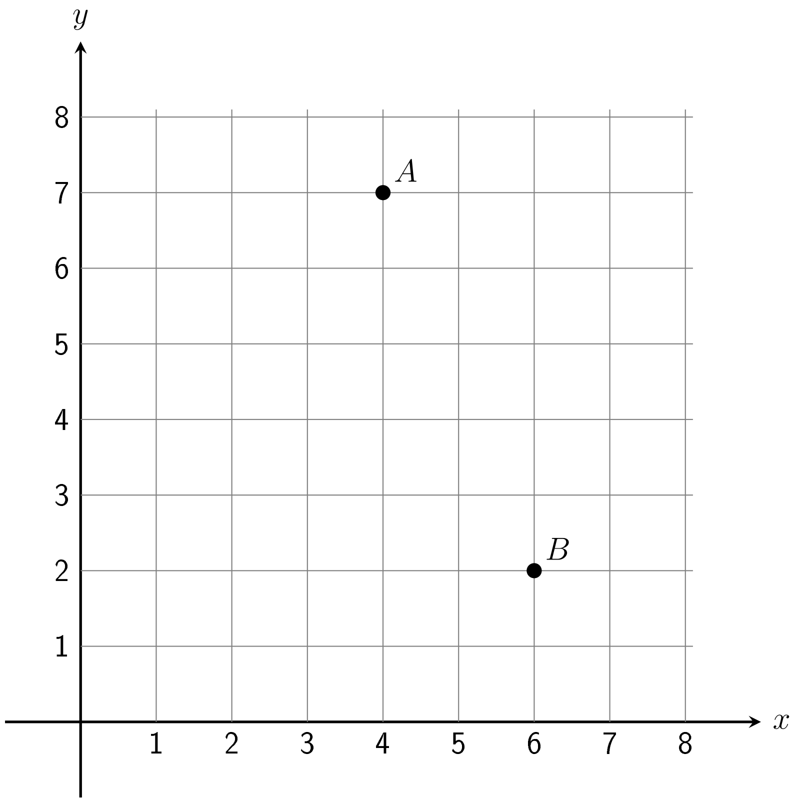
Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐					
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 zu Kapitel 4 Funktionen einer Variablen

Welche der Gleichungen erzeugt die Gerade, die im folgenden Diagramm die Punkte A und B durchläuft?



a) $2x - 5y = -27$

b) $y = 17 + \frac{5}{2}x$

c) $\mathbf{5x + 2y = 34}$

d) $2x + 5y = 22$

Lösungsweg durch Einsetzen

Die beiden Punkte $A = (4, 7)$ und $B = (6, 2)$ müssen die jeweilige Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned}
a)\ A &: 2*4 - 5*7 &&= 8 - 35 &&= -27 \checkmark \\
B &: 2*6 - 5*2 &&= 12 - 10 &&= 2\ \times \\
b)\ A &: 7 \neq 17 + \frac{5}{2}4 &&= 17 + 10 &&= 27\ \times \\
c)\ A &: 5*4 + 2*7 &&= 20 + 14 &&= 34 \checkmark \\
B &: 5*6 + 2*2 &&= 30 + 4 &&= 34 \checkmark \\
d)\ A &: 2*4 + 5*7 &&= 8 + 35 &&\neq 22\ \times
\end{aligned}$$

Lösungsweg durch implizites Differenzieren

Dem Diagramm kann schnell entnommen werden, dass die Steigung der Gerade, also y', $-\frac{5}{2}$ sein muss. Implizites Differenzieren der Gleichungen ergibt:

$$a)\ 2 - 5y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{2}{5} \neq -\frac{5}{2}$$

$$b)\ y' = \frac{5}{2} \quad \neq \quad -\frac{5}{2}$$

$$c)\ 5 + 2y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{5}{2} \checkmark$$

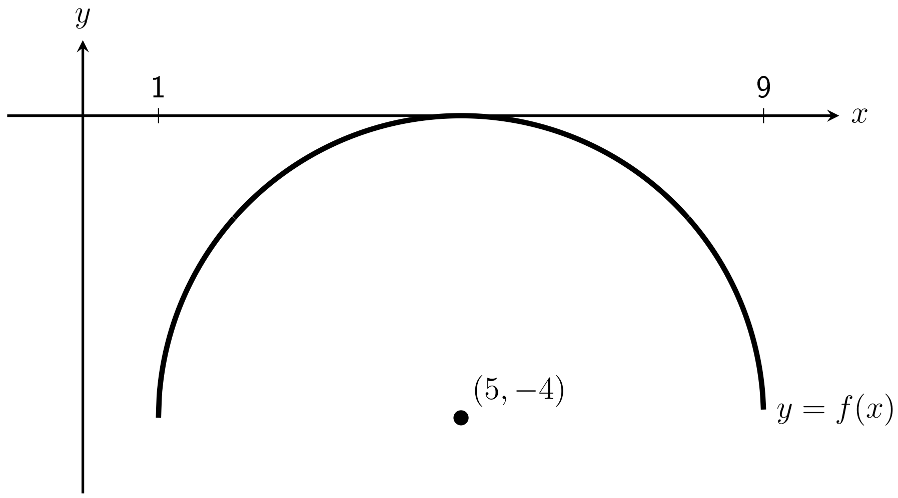
$$d)\ 2 + 5y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{2}{5} \neq -\frac{5}{2}$$

Aufgabe 2 zu Kapitel 5 Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei die Funktion $f : [1, 9] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{16 - (x-5)^2} - 4$$

und folgendem Graphen:



Wie lautet der Abstand eines beliebigen Punktes (x, y) auf dem Graphen dieser Funktion zum Punkt $(5, -4)$?

a) $||(x, y) - (5, -4)|| = 5$

b) $||(x, y) - (5, -4)|| = -4$

c) $||(x, y) - (5, -4)|| = 16$

d) $||(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{5}, -\mathbf{4})|| = \mathbf{4}$

Lösungsweg (allgemein):

Setze Punkt $(x, f(x))$ in die Abstandsformel ein:

$$\begin{aligned} ||(x, f(x)) - (5, -4)|| &= \sqrt{(x-5)^2 + (f(x) - (-4))^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{16-(x-5)^2} - 4 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{16-(x-5)^2})^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + 16 - (x-5)^2} \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Lösungsweg (speziell):

Setze (einfachen) Punkt ein, der offensichtlich auf dem Graphen liegt, z.B.: $(1, -4)$, $(5, 0)$ oder $(9, -4)$
Für diese Punkte ist die x- oder y-Differenz gleich null, die jeweils andere Differenz ist im Betrag gleich 4.

Aufgabe 3 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -2x^2 + x - 1$$

Welcher der angegebenen Ausdrücke entspricht dem Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für ein beliebiges $\Delta x \neq 0$?

a) $-4x - 2\Delta x + 1$

b) $-4x - 4\Delta x + 1$

c) $-2x + 1 - 2\Delta x$

d) $-2(2x + \Delta x - 1)$

Lösungsweg

Vorbemerkung: Ableiten der Funktion ergibt $f'(x) = -4x + 1$.
Wird in den Antwortmöglichkeiten $\Delta x \to 0$ betrachtet, kommen nur a) und b) infrage.

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= -2(x + \Delta x)^2 + x + \Delta x - 1 \\
&= -2x^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1 \\
f(x) &= -2x^2 + x - 1 \\
f(x + \Delta x) - f(x) &= -4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 + \Delta x \\
\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= -4x - 2\Delta x + 1 \ \to a)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 zu Kapitel 6 Differentialrechnung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (3x^2 - 2)(2 - 3x^2)$$

Welcher der angegebenen Ausdrücke entspricht der ersten Ableitung dieser Funktion?

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = -2x(6x - 2)$

c) $f'(x) = -2x(3x^2 - 2)$

d) $\mathbf{f'(x) = -12x(3x^2 - 2)}$

Lösungsweg (mit Produktregel)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 2)'(2 - 3x^2) + (3x^2 - 2)(2 - 3x^2)' \\ &= 6x(2 - 3x^2) + (3x^2 - 2)(-6x) \\ &= -6x(3x^2 - 2) + (3x^2 - 2)(-6x) \\ &= -12x(3x^2 - 2) \end{aligned}$$

Lösungsweg (mit Kettenregel)

$$\begin{aligned} f(x) &= -(3x^2 - 2)^2 \\ f'(x) &= -2(3x^2 - 2)(6x) \\ &= -12x(3x^2 - 2) \end{aligned}$$

Lösungsweg (mit Ausmultiplizieren)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 \cdot 2 - 3x^2 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3x^2 \\ &= -9x^4 + 12x^2 - 4 \\ f'(x) &= -36x^3 + 24x \\ &= -12x(3x^2 - 2) \end{aligned}$$

Aufgabe 5 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Gegeben sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -(x + 1)(x - 1)$$

Wie lautet die Elastizität dieser Funktion an der Stelle $x_0 = 0$?

Hinweis: $El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$

a) $El_x f(x_0) = 1/2$

b) $El_x f(x_0) = -1/2$

c) $\mathbf{El_x f(x_0) = 0}$

d) $El_x f(x_0) = 1$

Lösungsweg

$$El_x f(x_0) = f'(x_0) \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \frac{0}{f(x_0)} = 0$$

Aufgabe 6 zu Kapitel 8 Univariate Optimierung

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \frac{4}{3}] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Welcher der Werte für x ist **keine** Extremstelle dieser Funktion auf $[0, \frac{4}{3}]$?

a) $x_1 = \frac{1}{3}$

b) $\mathbf{x_2 = \frac{2}{3}}$

c) $x_0 = 0$

d) $x_3 = 1$

Lösungsweg (notwendige Bedingung erster Ordnung)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\begin{aligned}
a)\ f'\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{3}{9} - \frac{4}{3} + 1 = 0 \\
b)\ f'\left(\frac{2}{3}\right) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\frac{2}{3} + 1 \\
&= \frac{12}{9} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \neq 0 \\
c)\ x_0 = 0 & \quad \text{Randpunkt! BEO ohne Anwendung!} \\
d)\ f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Der innere Punkt $x_2 = \frac{2}{3}$ (b) verletzt die notwendige Bedingung erster Ordnung, er kann also keine Extremstelle sein.

Lösungsweg (durch Einsetzen)

$$\begin{aligned}
a)\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27} \\
b)\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \\
&= \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8-24+18}{27} = \frac{2}{27} \\
c)\ f(0) &= (0)^3 - 2(0)^2 + 0 = 0 \\
d)\ f(1) &= (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Wegen

$$f(0) = f(1) < f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$$

kann $x_2 = \frac{2}{3}$ kein Extrempunkt sein.

Aufgabe 7 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x + y)(x - y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Wie lautet der Gradient $Df(x_0, y_0)$ von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, -2)$?

a) $Df(x_0, y_0) = (2, -2)$

b) $Df(x_0, y_0) = (0, 0)$

c) $Df(x_0, y_0) = (4, -4)$

d) $\mathbf{Df(x_0, y_0) = (4, 4)}$

Lösungsweg

Der Gradient ist gegeben durch

$$Df(x, y) = (f_1'(x, y), f_2'(x, y))$$

Partielles Differenzieren mit Produktregel:

$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= x - y + x + y = 2x \\ f_2'(x, y) &= x - y - (x + y) = -2y \end{aligned}$$

Partielles Differenzieren nach Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2 \\ f_1'(x, y) &= 2x \\ f_2'(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Der Gradient ist demnach gegeben durch

$$Df(x, y) = (2x, -2y)$$

und

$$Df(2, -2) = (2 \cdot 2, -2 \cdot (-2)) = (4, 4) \to d)$$

Aufgabe 8 zu Kapitel 11 Funktionen mehrerer Variablen

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei der Gradient im Punkt $(x_0, y_0) = (4, -4)$ gegeben durch

$$D_f(x_0, y_0) = (2, 2)$$

Welche der folgenden Gleichungen kann **keine** Höhenlinie der Funktion f durch den Punkt (x_0, y_0) beschreiben?

a) $\mathbf{(x-3)^2 - (y+5)^2 = 0}$

b) $\mathbf{2(x-3)(y+5) = -2}$

c) $\mathbf{x^2/y^2 = 1}$

d) $2(x+y) = 0$

Diese Aufgabe weicht unintendiert vom Schema ab.

Die korrekte Frage zu dieser Aufgabe hätte lauten sollen:

Welche der folgenden Gleichungen kann eine Höhenlinie der Funktion f durch den Punkt (x_0, y_0) beschreiben?

Sind nur zutreffende Antworten angekreuzt: 3 Punkte

Ist eine zutreffende und die nicht zutreffende Antwort angekreuzt: 1 Punkt

Lösungsweg

a)

$$\begin{aligned}
(4-3)^2 - (-4+5)^2 = 1^2 - 1^2 &= 0 \checkmark \\
f_1'(x,y) = 2(x-3) =|_{x=4} 2(4-3) &= 2 \checkmark \\
f_2'(x,y) = -2(y+5) =|_{y=-4} -2(-4+5) &\neq 2 \times
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2(4-3)(-4+5) = 2 \cdot 1 \cdot 2 &\neq -2 \times \\
f_1'(x,y) = 2(y+5) =|_{y=-4} 2(-4+5) &= 2 \checkmark \\
f_2'(x,y) = 2(x-3) =|_{x=4} 2(4-3) &= 2 \checkmark
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(4)^2/(-4)^2 = 16/16 &= 1 \checkmark \\
f_1'(x,y) = 2x/y^2\big|_{x=4,y=-4} 2 \cdot 4/(-4)^2 &\neq 2 \times \\
f_2'(x,y) = -2x^2/y^3\big|_{x=4,y=-4} -2 \cdot 4^2/(-4)^3 &\neq 2 \times
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
2(4+(-4)) &= 0 \checkmark \\
f_1'(x,y) &= 2 \checkmark \\
f_2'(x,y) &= 2 \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Multivariate Optimierung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = -(x + 2)^2 - (y - 1)^2 + 9$$

definiert ist, hat genau eine Extremstelle (x^*, y^*).

Wie lautet diese Extremstelle? Handelt es sich um eine Maximum- oder Minimumstelle?

a) $(x^*, y^*) = (2, -1)$, Maximumstelle

b) $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (\mathbf{-2}, \mathbf{1})$, **Maximumstelle**

c) $(x^*, y^*) = (-2, 1)$, Minimumstelle

d) $(x^*, y^*) = (2, -1)$, Minimumstelle

Lösungsweg

Der Definitionsbereich der Funktion f ist $\mathbb{R}^2$ und besteht nur aus inneren Punkten. Daher muss die notwendige Bedingung erster Ordnung für die Extremstelle (x^*, y^*) gelten.

$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= -2(x + 2) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ f_2'(x, y) &= -2(y - 1) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x^*, y^*) = (-2, 1)$$

Die Hessematrix der Funktion f lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$f''_{11} \leq 0,\ f''_{22} \leq 0,\ f''_{11} \cdot f''_{22} \geq f''_{12} \cdot f''_{21}$$

Demnach ist $(x^*, y^*) = (-2, 1)$ eine Maximumstelle.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Optimierung unter Nebenbedingungen

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2_{\geq} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x + y$ und $g(x, y) = x^3 y$.

Gesucht ist nach dem Optimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ des Problems

$$\min_{x,y} f(x, y) \text{ u.d.B. } g(x, y) = 16$$

Wie lautet der Wert von f an der Stelle (x^*, y^*)?

a) 2

b) 4

c) 16

d) 8

Lösungsweg mit Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y) = 3x + y - \lambda(x^3 y - 16)$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial x} &= 3 - 3\lambda x^2 y \quad \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{x^2 y} \\
\frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial y} &= 1 - \lambda x^3 \quad \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{x^3} \\
\Rightarrow \frac{1}{x^2 y} &= \frac{1}{x^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y
\end{aligned}$$

Nebenbedingung:

$$x^3 y = 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Da der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2_{\geq}$ lautet, verbleibt nur $x^* = 2 \Rightarrow y^* = 2$.

Der Wert von f an der Stelle $(x^*, y^*) = (2, 2)$ lautet

$$f(x^*, y^*) = 3x^* + y^* = 8$$

Lösungsweg per Substitution

Forme um: $x^3 y = 16 \Leftrightarrow y = 16/x^3$ und ersetze y in Zielfunktion f:

$$\tilde{f}(x) = f(x, 16/x^3) = 3x + 16/x^3$$

Ein inneres Optimum erfüllt die Bedingung erster Ordnung:

$$\tilde{f}'(x) = 3 - 3 \cdot 16/x^4 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^4 = 16$$

Der weitere Lösungsweg ist analog zu oben.