Vorlesung zu Kapitel 18:[1]

Nebenbedingungen in Gleichheit

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Beispiel Konsumentscheidung

Bestes Güterbündel, welches leistbar ist

„**Bestes Güterbündel**“: optimal im Sinne der Nutzenfunktion

Zielfunktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

„**leistbar**“: Kosten entsprechen dem verfügbaren Budget

Nebenbedingung $p \cdot x + y = m$

m: verfügbares Geld

x: Konsumgut, p: Preis hierfür

y: Ausgaben für andere Güter

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x, y) \text{ unter der Nebenbedingung } px + y = m$$

Einfache Lösung

Forme Nebenbedingung nach y um:

$$px + y = m \Leftrightarrow y = m - px$$

und evaluiere u nur entlang des Pfades:

$$(x, y) \text{ mit } y = m - px$$

Definiere univariate Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) := u(x, m - px)$$

ohne Nebenbedingung.

Probleme:
Nebenbedingung nicht immer leicht nach y aufzulösen.
Gelingt nur bei zwei Gütern.

Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Seien

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

differenzierbar und sei c im Bild von g.

Optimierungsproblem:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} / \min f(x, y) \text{ unter der Bedigung } g(x, y) = c$$

Assoziiere **Lagrange Multiplikator** $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Nebenbedingung $g(x, y) = c$.

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Zielfunktion f

Nebenbedingung $g(x, y) = c$

Lagrangemultiplikator λ

Anmerkung:

Für Paare (x, y) mit $g(x, y) = c$ gilt $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y)$

1. Partielle Ableitungen:

$\mathcal{L}_1'(x, y) = f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y)$
$\mathcal{L}_2'(x, y) = f_2'(x, y) - \lambda g_2'(x, y)$

Die Methode des Lagrange-Multiplikators

(i) Schreibe die Lagrange-Funktion mit dem Multiplikator λ auf.

(ii) Differenziere $\mathcal{L}$ nach x und y.

(iii) *Bedingungen erster Ordnung*:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) = 0$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = c$$

(iv) Wenn es eine Lösung (x^*, y^*) des Optimierungsproblems mit der bindenden Nebenbedingung gibt, so ist (x^*, y^*) Teil einer Lösung von (iii).

Wichtig:

- Wenn $g'_1(x^*, y^*) = g'_2(x^*, y^*) = 0$, kann die Methode scheitern.

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Belindas verallgemeinertes Konsumproblem

Nutzenfunktion: $u(x, y) = x^2 y$

Budgetbedingung: $x + y = m$,
wobei $m > 0$ Belindas Einkommen ist.

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 y - \lambda(x + y - m)$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2xy - \lambda \stackrel{!}{=} 0, \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x^2 - \lambda \stackrel{!}{=} 0, \ x + y = m$$

Belindas verallgemeinertes Konsumproblem:

Das Optimum ist:

$$(x^*(m), y^*(m)) = \left(\frac{2}{3}m, \frac{1}{3}m\right)$$

mit $\lambda^*(m) = \frac{4}{9}m^2$.

Die optimale Konsumentscheidung hängt vom Einkommen m ab.

Optimalwertfunktion:

$$u^*(m) := u(x^*(m), y^*(m)) = \frac{4}{27}m^3$$

Der Nutzen im Optimum hängt ebenfalls von m ab.

Es gilt:

$$\frac{du^*(m)}{dm} = 3\frac{4}{27}m^2 = \frac{4}{9}m^2 = \lambda^*(m)$$

Envelope Theorem („Umhüllenden Theorem“)

Sei für ein Optimierungsproblem mit bindender Nebenbedingung die differenzierbare Lagrangefunktion gegeben durch

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, c) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

und bezeichne $x^*(c)$ und $y^*(c)$ mit $\lambda^*(c)$ die Optimalstelle des Problems.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$\begin{aligned} f^*(c) &= \mathcal{L}(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c), c) \\ &= f(x^*(c), y^*(c)) - \lambda^*(c)(\underbrace{g(x^*(c), y^*(c)) - c}_{=0}) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c), c)}{\partial c} = \lambda^*(c)$$

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

Eine Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung erfüllt die Bedingungen erster Ordnung der Lagrangefunktion.

Deswegen stellen alle Tripel (x, y, λ), die die Bedingungen erster Ordnung erfüllen, Lösungskandidaten dar.

Bei mehreren Lösungskandidaten müssen wir entscheiden, welcher Kandidat tatsächlich das Problem löst.

Beispiel

Zielfunktion:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

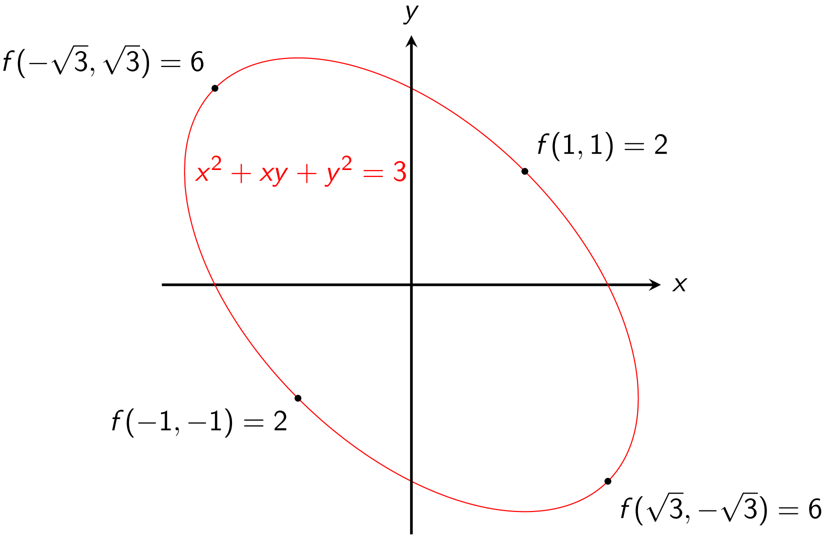
Nebenbedingung:

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

Lagrange-Funktion:

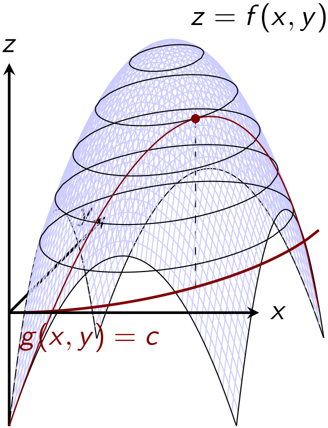
$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 3\right)$$

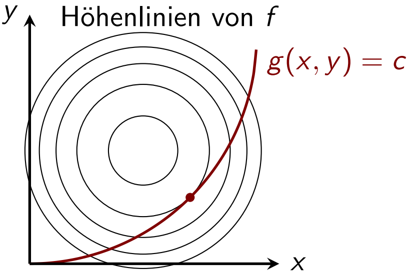
$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 3\right)$$



18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Ein geometrisches Argument





Der Graph von $g(x, y) = c$ ist im Optimum tangential zu einer Höhenlinie von f.

$\Rightarrow$ Die Steigungen des Graphen und der Höhenlinie stimmen überein.

Ein analytisches Argument

Die Gleichung $f(x, y) = c$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ definieren Höhenlinien von f und g.

Die Steigungen dieser Höhenlinien sind definiert durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'(x, y)}{f_2'(x, y)} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{g_1'(x, y)}{g_2'(x, y)}$$

Im Optimum (x_0, y_0) sind die Höhenlinien von f und g tangential, sie haben also die gleiche Steigung:

$$-\frac{f_1'(x_0, y_0)}{f_2'(x_0, y_0)} = -\frac{g_1'(x_0, y_0)}{g_2'(x_0, y_0)}$$

Ein analytisches Argument

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$f_1'(x_0, y_0) - \lambda \cdot g_1'(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f_1'(x_0, y_0)}{g_1'(x_0, y_0)}$$

$$f_2'(x_0, y_0) - \lambda \cdot g_2'(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f_2'(x_0, y_0)}{g_2'(x_0, y_0)}$$

Demnach muss gelten:

$$\frac{f_1'(x_0, y_0)}{g_1'(x_0, y_0)} = \frac{f_2'(x_0, y_0)}{g_2'(x_0, y_0)}$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Tangentialbedingung:

$$-\frac{f_1'(x_0, y_0)}{f_2'(x_0, y_0)} = -\frac{g_1'(x_0, y_0)}{g_2'(x_0, y_0)}$$

Nebenbedingungen in Ungleichungsform

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) \text{ unter der Nebenbedingung } g(x,y) \leq c$$

Zulässige oder **mögliche** Menge S:

$$S := \{(x,y) \in D \;:\; g(x,y) \leq c\}$$

Für ein Minimierungsproblem: maximiere $-f(x,y)$!

Die Kuhn-Tucker-Methode

Um die einzig möglichen Lösungen des Maximierungsproblems mit Ungleichungen zu finden, gehe wie folgt vor:

(i) Definiere $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

(ii) Löse $\mathcal{L}'_1(x, y) = 0$ und $\mathcal{L}'_2(x, y) = 0$

(iii) **Komplementäre Schlupfbedingung**:
$\lambda \geq 0$ und $\lambda = 0$, falls $g(x, y) < c$

(iv) Nebenbedingung: $g(x, y) \leq c$

(v) Falls (x, y) und λ das Problem löst, so sind (ii), (iii) und (iv) erfüllt.

Wenn $g(x, y) = c$ und $g'_1(x, y) = g'_2(x, y) = 0$ im Maximum des Problems gilt, kann diese Methode versagen.

Beispiel: Präferenzen mit Sättigungspunkt

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \; -(x-M)^2 - (y-5)^2 \text{ u.d.B. } x + y \leq 10$$

(i) $\mathcal{L}(x,y) = -(x-M)^2 - (y-5)^2 - \lambda(x+y-10)$

(ii) $\mathcal{L}_1'(x,y) = -2(x-M) - \lambda = 0$
$\mathcal{L}_2'(x,y) = -2(y-5) - \lambda = 0$

(iii) $\lambda \geq 0$ und $\lambda = 0$, falls $x + y < 10$

(iv) $x + y \leq 10$

Nichtnegativitätsbedingungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Betrachte Problem

$$\max_{x,y} \; f(x,y) \text{ unter } x \geq 0$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(-x - 0)$$
$$= f(x,y) + \lambda x$$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda x$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(x,y) &= f_1'(x,y) + \lambda = 0 & (1) \\ \mathcal{L}_2'(x,y) &= f_2'(x,y) = 0 & (2) \\ \lambda &\geq 0 \text{ und } \lambda = 0, \text{ falls } x > 0 & (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (3) folgt: $f_1'(x,y) = -\lambda \leq 0$ und $= 0$, falls $x > 0$

Ersetze (1) und (3) durch kürzere Bedingung:

$$f_1'(x,y) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0\text{)}$$

Vereinfachte Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$\max_{(x,y)\in D} \; f(x,y) \text{ u.d.B. } x \geq 0$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &\leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0) \\ f_2'(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Präferenzen mit Sättigungspunkt

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} -(x-M)^2 - (y-5)^2 \text{ u.d.B. } x \geq 0$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} -2(x-M) &\leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0) \\ -2(y-5) &= 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Lagrange-Multiplikatoren & Lagrange-Funktion
- Notwendige Bedingungen erster Ordnung
- Lagrange-Multiplikatoren als Schattenpreise
- Tangentialbedingung
- Nebenbedingungen als Ungleichungen