Vorlesung zu Kapitel 17:[1]

# Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

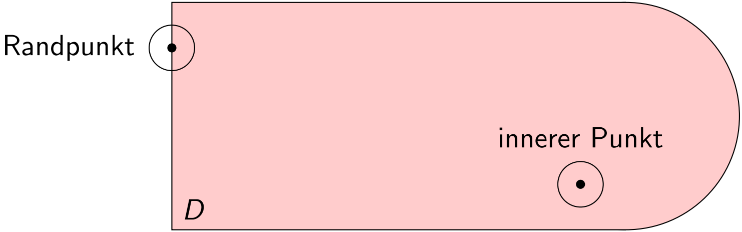
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

# Definitionen: Innerere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **innerer Punkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert ein Kreis, der vollständig in $D$ liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert kein Kreis, der vollständig in $D$ liegt.



# Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Die Funktion $f$ kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt $(x_0, y_0)$ ihres Definitionsbereichs $D$ annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f_1'(x, y) = 0, \text{ und } f_2'(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

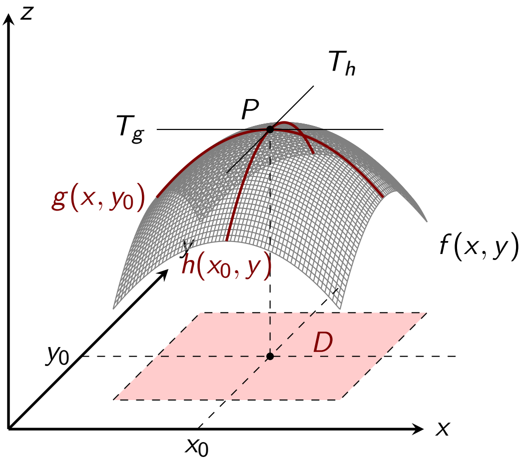
# Beispiel 17.1.1

Die Funktion $f$ sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

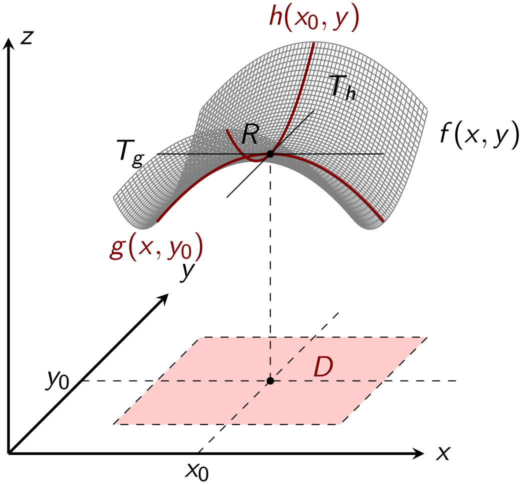
Setze voraus, dass $f$ eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

# Maximumspunkt $P$, stationäre Stelle $(x_0, y_0)$




Steigung von $T_g$: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von $T_h$: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

# Sattelpunkt $R$, stationäre Stelle $(x_0, y_0)$




Steigung von $T_g$: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von $T_h$: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

# 17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

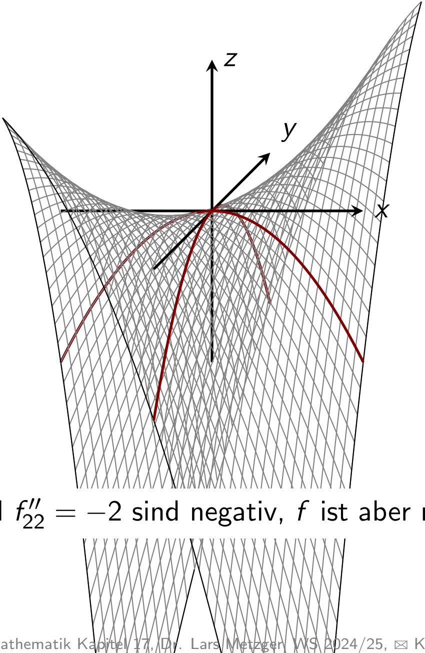
Sei die Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge $D$ und sei $(x_0, y_0)$ eine innere stationäre Stelle in $D$. Dann gilt:

a) Falls die Funktion $f$ konkav ist, ist $(x_0, y_0)$ eine Maximumstelle.

b) Falls die Funktion $f$ konvex ist, ist $(x_0, y_0)$ eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

# $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$




$f''_{11} = -2$ und $f''_{22} = -2$ sind negativ, $f$ ist aber nicht konkav!

# Zweite partielle Ableitungen: Hessematrix (Kap 14)

Sei $f$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen.

Die Hessematrix von $f$ ist die Matrix der zweiten Ableitungen:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

Die Determinante von $f''(x,y)$ ist definiert durch:

$$|f''(x,y)| = f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - f''_{12}(x,y)f''_{21}(x,y)$$

# Definitheit der Hessematrix (aus Kapitel 13)

Die Hessematrix $f''(x, y)$ and der Stelle $(x, y)$ heißt...

- **positiv definit**, falls
  $|f''(x, y)| > 0$ und $f''_{11}(x, y) > 0$
- **positiv semidefinit**, falls
  $|f''(x, y)| \geq 0$ und $f''_{11}(x, y), f''_{22}(x, y) \geq 0$
- **negativ definit**, falls
  $|f''(x, y)| > 0$ und $f''_{11}(x, y) < 0$
- **negativ semidefinit**, falls
  $|f''(x, y)| \geq 0$ und $f''_{11}(x, y), f''_{22}(x, y) \leq 0$

# Konkavität/Konvexität bei Funktionen mit stetigen zweiten Ableitungen (Kapitel 14)

Sei $f''(x, y)$ die Hessematrix der Funktion $f$ an der Stelle $(x, y)$.

Dann gilt:

$f''(x, y)$ ist positiv definit für alle $(x, y)$ $\Rightarrow$ f ist strikt konvex

$f''(x, y)$ ist positiv semidefinit für alle $(x, y)$ $\Leftrightarrow$ f ist konvex

$f''(x, y)$ ist negativ definit für alle $(x, y)$ $\Rightarrow$ $f$ ist strikt konkav

$f''(x, y)$ ist negativ semidefinit für alle $(x, y)$ $\Leftrightarrow$ $f$ ist konkav

# Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

$$\pi(x,y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1,2 \cdot x - 0,6 \cdot y$$

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

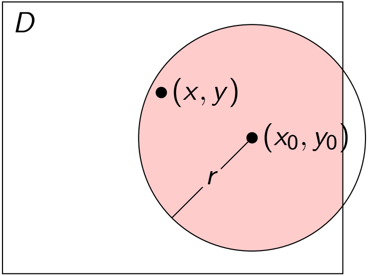
# 17.3 Lokale Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Punkt $(x_0, y_0)$ ist eine **lokale Maximumstelle** von $f$ in der Menge $D$, wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle Paare $(x, y)$ in $D$ mit geringerem Abstand zu $(x_0, y_0)$, als $r$.

Wenn die Ungleichung strikt ist für alle $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, dann ist $(x_0, y_0)$ eine **strikte** lokale Maximumstelle.

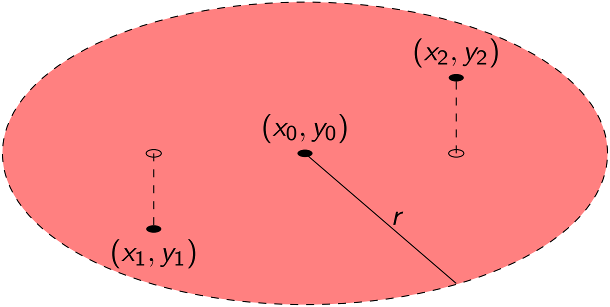
Ist die Ungleichung umgekehrt, handelt es sich bei $(x_0, y_0)$ um eine **lokale Minimumstelle**, die ggf. strikt ist.



# Sattelstelle

Eine stationäre Stelle, welche keine lokale Extremstelle ist, heißt Sattelstelle.

Eine Sattelstelle $(x_0, y_0)$ hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl $r > 0$ zwei Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ in $D$ im Umkreis $r$ von $(x_0, y_0)$ gibt mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.



# Test der zweiten Ableitungen auf lokale Extrema

Sei $f$ zweimal stetig differenzierbar und sei $(x_0, y_0)$ eine innere stationäre Stelle.

Es sei $f''(x_0, y_0)$ die Hessematrix von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0)$.

(a) Wenn $|f''(x_0, y_0)| > 0$ und $f'_{11}(x_0, y_0) < 0$, wenn also $f''(x_0, y_0)$ negativ definit ist, dann ist $(x_0, y_0)$ eine strikte lokale Maximumstelle.

(b) Wenn $|f''(x_0, y_0)| > 0$ und $f'_{11}(x_0, y_0) > 0$, wenn also $f''(x_0, y_0)$ positiv definit ist, dann ist $(x_0, y_0)$ eine strikte lokale Minimumstelle.

(c) Wenn $|f''(x_0, y_0)| < 0$, dann ist $(x_0, y_0)$ eine Sattelstelle.

(d) Wenn $|f''(x_0, y_0)| = 0$, dann kann $(x_0, y_0)$ eine lokale Maximumstelle, eine lokale Minimumstelle oder eine Sattelstelle sein.

# 17.4 Beispiel: Diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen $p_S$ und $p_M$ verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_s) = \max\{6000 - 1000p_s, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

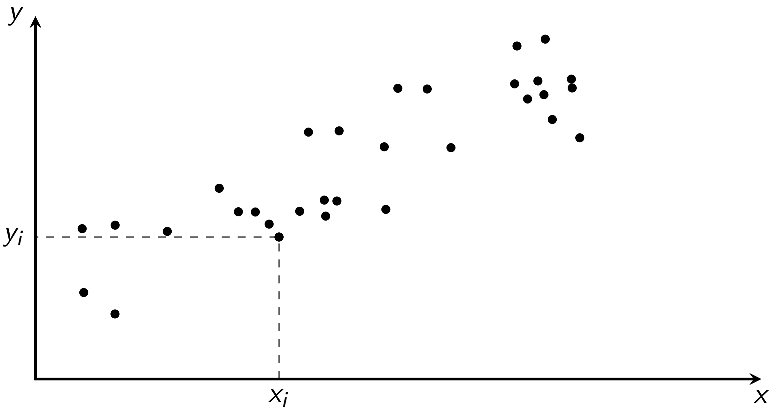
Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise $p_S^*$ und $q_S^*$ maximieren den Gewinn der Mensa?

Welcher Preis $p^*$ maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

# 17.4 Einfache Lineare Regression

Schätzung des statistischen Zusammenhangs zwischen einer erklärenden Variablen („Regressor“, $x$) und einer erklärten Variablen („Regressand“, $y$).



# Einfache Lineare Regression

Stichprobe mit Umfang $n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}\text{: Regressand}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}\text{: Regressor}}$$

Es gelte $x_i \neq x_j$ für mindestens ein $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Modell:

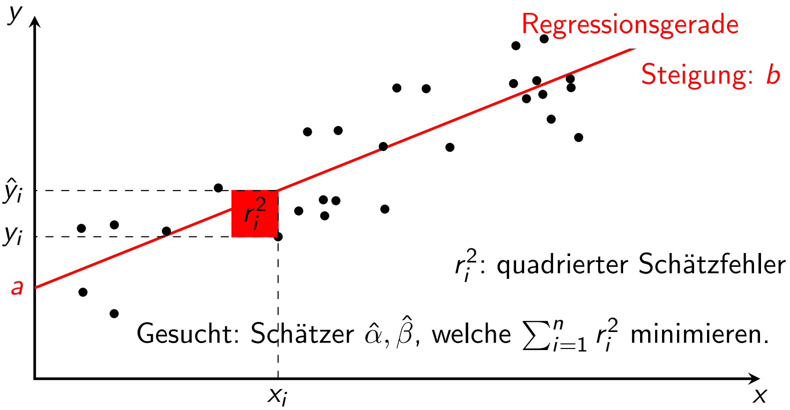
$$y_i = \alpha + x_i \cdot \beta + \epsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Unbekannte Parameter $\alpha, \beta$
Unbekannter Störterm $\epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$

# Einfache Lineare Regression – Grafische Darstellung

Vermutete Parameter: $a, b$ $\quad\rightarrow$ Prognose $\hat{y}_i = a + bx_i$

Schätzfehler (hängt von $a, b$ ab): $r_i = y_i - \hat{y}_i$




Gesucht: Schätzer $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, welche $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ minimieren.

# Einfache Lineare Regression

Zielfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i)^2$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \\ f_2'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}$$

# Einfache Lineare Regression

Sei $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ein stationärer Punkt von $f$.

Hinreichende Bedingungen für ein Minimum:

- $f''_{11} = 2n > 0$ ✓
- $f''_{22} = 2n\overline{xx} > 0$ ✓
- $f''_{11} f''_{22} = (2n)^2 \cdot \overline{xx} > (2n)^2 \cdot \bar{x}^2 = f''_{12} f''_{21} \Leftrightarrow \overline{xx} - \bar{x}\bar{x} > 0$ ✓

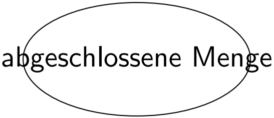
$\Rightarrow$ $f$ ist streng konvex in $a, b$

$\Rightarrow$ der innere stationäre Punkt $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ist eine Minimumstelle.

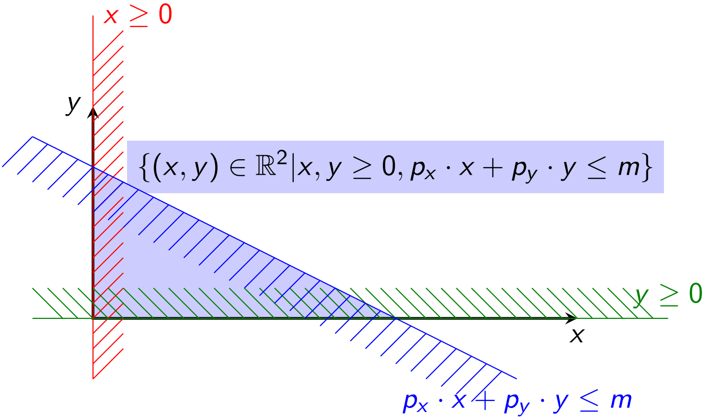
# 17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge $D$ ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.


Eine Menge $D$ ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



# Beispiel: Budgetmenge




Schwache Ungleichungen:

$\Rightarrow$ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

$\Rightarrow$ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

# 17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius $r < \infty$ gibt, der $D$ vollständig enthält.

**Beispiel Budgetmenge:**

Wähle $r = \max\left\{\frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y}\right\}$. Der Mittelpunkt des Kreises sei $(0, 0)$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

# 17.5 Der Extremwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Stelle $(a, b) \in D$, an der $f$ ein Minimum hat und es existiert eine Stelle $(c, d) \in D$, an der $f$ ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \; \forall \; (x, y) \in D$$

**Bemerkung:**

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an $D$ sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für $D = \mathbb{R}^2_{\geq}$ die Funktion $f(x, y) = -x - y$ ein Maximum an der Stelle $(0, 0)$, $\mathbb{R}^2_{\geq}$ ist aber nicht beschränkt.

# Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion $f$, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

(i) Bestimme alle stationären Stellen von $f$ im Innern von $D$.

(ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von $f$ auf allen Teilstücken des Randes von $D$ und die zugehörigen Stellen.

(iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von $f$ in $D$. Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von $f$ in $D$.

# Belindas optimale Konsumentscheidung

Belinda habe die Nutzenfunktion $u(x, y) = x^2 \cdot y$ für $x, y \geq 0$.

Ihre Budgetbedingung lautet $x + y \leq 3$.

Die Menge $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 3\big\}$ ist nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

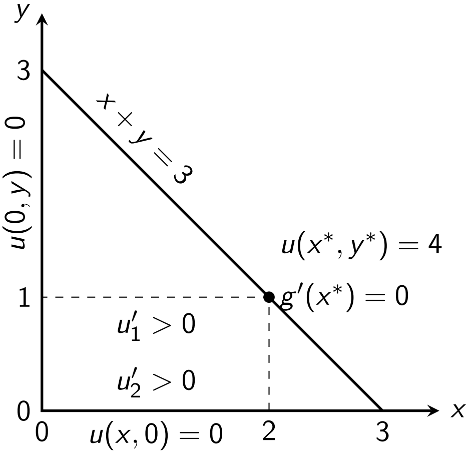
Die Funktion $u$ ist stetig auf $D$.

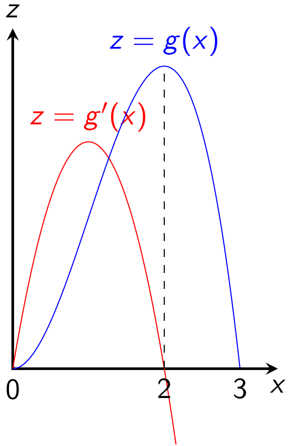
Es existiert demnach eine Maximalstelle. (Extremwertsatz)

Wie lautet die optimale Konsumentscheidung?

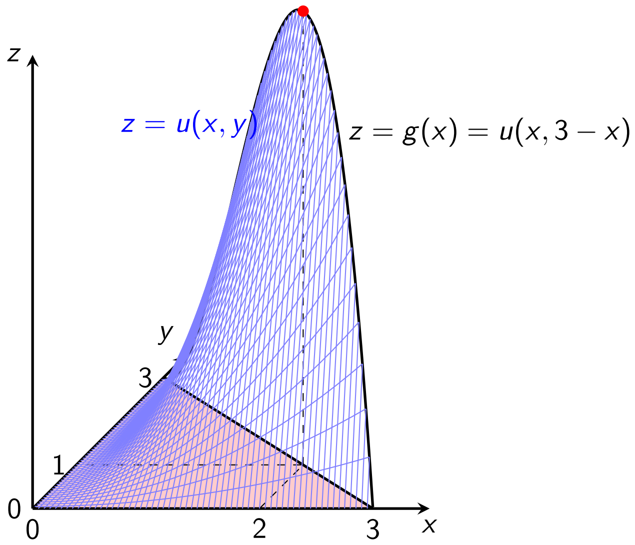
# Belindas optimale Konsumentscheidung

$$u(x,y) = x^2 y, \quad g(x) = x^2(3-x), \quad g'(x) = 3x(2-x)$$
$$D = \{x, y \geq 0 : x + y \leq 3\}$$



# Belindas optimale Konsumentscheidung



# Ein nützliches Resultat

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und Wertebereich $R = f(D)$.

Sei $g : R \to \mathbb{R}$ und sei $(x^*, y^*)$ in $D$.

Definiere $h : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = g(f(x, y))$.

(a) Wenn $g$ monoton wachsend ist und $(x^*, y^*)$ die Funktion $f$ maximiert, dann maximiert dieselbe Stelle $(x^*, y^*)$ auch $h$.

(b) Wenn $g$ strikt monoton wachsend ist, dann maximiert $(x^*, y^*)$ die Funktion $f$ genau dann, wenn $(x^*, y^*)$ die Funktion $h$ maximiert.

# 17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Für $(x, r) \in D$ bezeichne $x$ eine Variable und $r$ einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x \; f(x, r)$$

bezeichne $x^*(r)$ den Wert $x$, welcher $f$ bei gegebenem Parameter $r$ maximiert.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

# Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge $x \geq 0$, Preis $r$, Kosten $C(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \pi(x, r) = rx - x^2$$

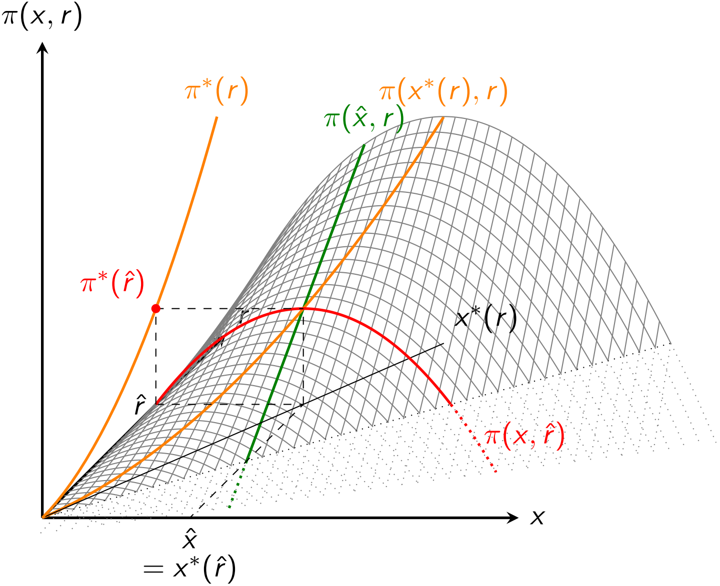
Bedingung erster Ordnung für $x$:

$$\pi_1'(x, r) = r - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

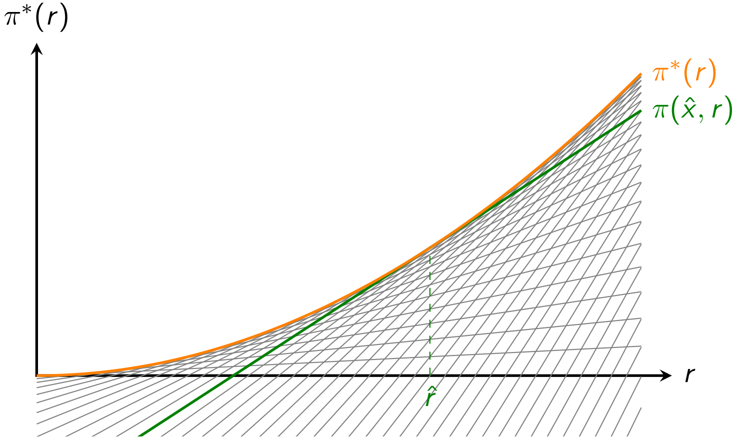
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

# Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



# Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$




An der Stelle $\hat{r}$ sind $\pi^*(r)$ und $\pi(\hat{x}, r)$ tangential!

# Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

wobei $x$ eine Variable und $r$ einen Parameter bezeichnet.

Sei $x^*(r)$ der Wert von $x$, der $f(x, r)$ für $r$ maximiert und sei $(x^*(r), r)$ ein innerer Punkt von $D$. Für $f^*(r) := f(x^*(r), r)$ gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

**Beweis:**

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Da $x^*(r)$ der Wert von $x$ ist, welcher $f(x, r)$ maximiert, gilt $\frac{\partial f(x^*(r),r)}{\partial x} = 0$.

# Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge $x^*(r)$ bei gegebenem Preis $r$:

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

# Zusammenfassung

- Notwendige Bedingung: Stationäre Stelle
- Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:
  Hesse neg. semidef. $\Leftrightarrow$ Konkav $\Rightarrow$ Maximum
  Hesse pos. semidef. $\Leftrightarrow$ Konvex $\Rightarrow$ Minimum
- Lokale Extremstellen, Sattelstellen
- Beispiel: Gewinnmaximierung, Lineare Regression
- Extremwertsatz
  offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- Beispiel: Belindas Konsumentscheidung
- Envelope-Theorem
  Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion