Vorlesung zu Kapitel 17:[1]

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

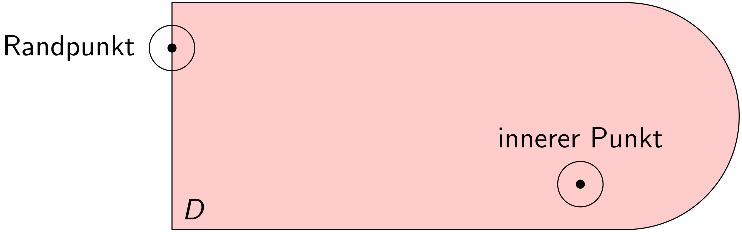
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Definitionen: Innerere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **innerer Punkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert ein Kreis, der vollständig in D liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert kein Kreis, der vollständig in D liegt.



Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Die Funktion f kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt (x_0, y_0) ihres Definitionsbereichs D annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f_1'(x, y) = 0, \text{ und } f_2'(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

Beispiel 17.1.1

Die Funktion f sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

Setze voraus, dass f eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

$$f_1'(x,y) = -4x - 2y + 36 \overset{!}{=} 0 \quad \Big| :2$$

$$f_2'(x,y) = -2x - 4y + 42 \overset{!}{=} 0 \quad \Big| :2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x - y + 18 = 0 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$-x - 2y + 21 = 0 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + y - 18 = 0 \quad \Big| +18$$

$$x + 2y - 21 = 0 \quad \Big| +21$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x &+ y &= 18 \\ x &+ 2y &= 21 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(falls A^{-1} existiert)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & -1 \cdot 7 \\ -1 \cdot 6 & +2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ -6 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

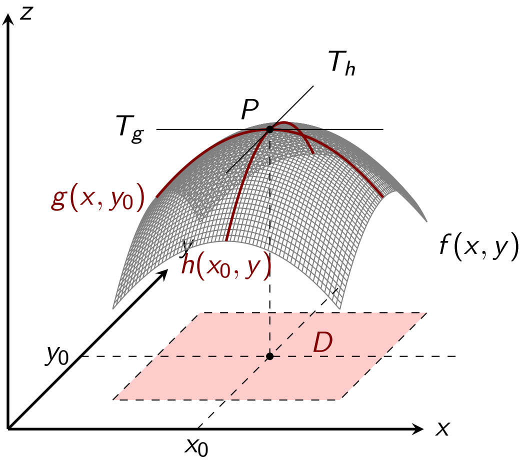
Probe

$$-4 \cdot 5 \; -2 \cdot 8 + 36 \;=\; -20 - 16 + 36 = 0 \checkmark$$

$$-2 \cdot 5 \; -4 \cdot 8 + 42 \;=\; -10 - 32 + 42 = 0 \checkmark$$

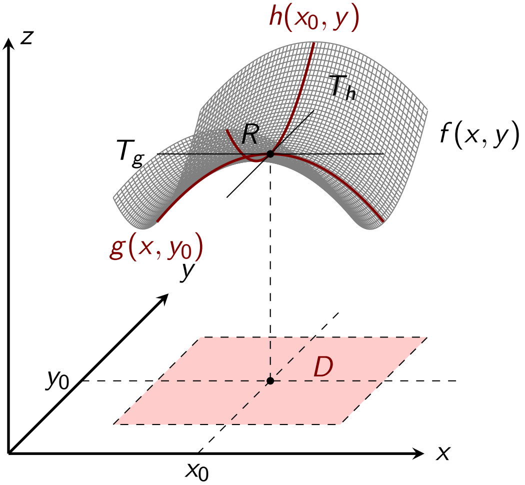
Falls eine Max-Stelle existiert, muss diese bei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sein.

Maximumspunkt P, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

Sattelpunkt R, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

Sei die Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge D und sei (x_0, y_0) eine innere stationäre Stelle in D. Dann gilt:

a) Falls die Funktion f konkav ist, ist (x_0, y_0) eine Maximumstelle.

b) Falls die Funktion f konvex ist, ist (x_0, y_0) eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

$f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$

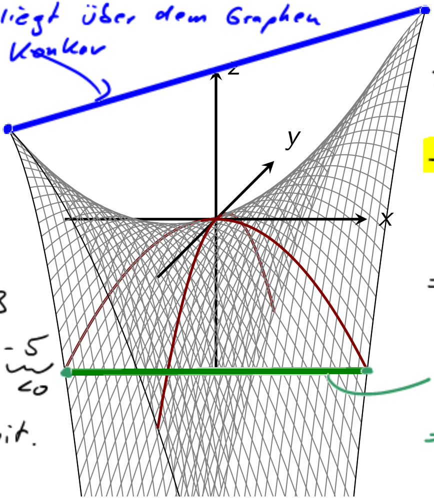
$f_1'(x,y) = 3y - 2x$

Verbindungslinie liegt über dem Graphen

$\Rightarrow$ f ist nicht konkav

$f_2'(x,y) = 3x - 2y$

$$f'' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$



$-2x + 3y = 0$

$3x - 2y = 0$

$\Rightarrow x^*, y^* = 0$

$$|f''| = (-2)\cdot(-2) - 3\cdot 3 = 4 - 9 = \underbrace{-5}_{<0}$$

$\Rightarrow f''$ ist indefinit.

V-linie liegt unter dem Graphen

$\Rightarrow$ f nicht konvex

$f_{11}'' = -2$ und $f_{22}'' = -2$ sind negativ, f ist aber nicht konkav!

Zweite partielle Ableitungen: Hessematrix (Kap 14)

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen.

Die Hessematrix von f ist die Matrix der zweiten Ableitungen:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

Die Determinante von $f''(x,y)$ ist definiert durch:

$$|f''(x,y)| = \underline{f''_{11}(x,y) f''_{22}(x,y)} - \underline{f''_{12}(x,y) f''_{21}(x,y)}$$

$$f''_{11} \cdot f''_{22} - \left(f''_{12}\right)^2 \quad (\text{da } f''_{12} = f''_{21})$$

Definitheit der Hessematrix (aus Kapitel 13)

Die Hessematrix $f''(x,y)$ and der Stelle (x,y) heißt...

- **positiv definit**, falls
  $|f''(x,y)| > 0$ und $f''_{11}(x,y) > 0$ $\quad (\Rightarrow f''_{22} > 0)$
- **positiv semidefinit**, falls
  $|f''(x,y)| \geq 0$ und $f''_{11}(x,y), f''_{22}(x,y) \geq 0$
- **negativ definit**, falls
  $|f''(x,y)| > 0$ und $f''_{11}(x,y) < 0$ $\quad (\Rightarrow f''_{22} < 0)$
- **negativ semidefinit**, falls
  $|f''(x,y)| \geq 0$ und $f''_{11}(x,y), f''_{22}(x,y) \leq 0$
- indefinit, falls $|f''| < 0$

Konkavität/Konvexität bei Funktionen mit stetigen zweiten Ableitungen (Kapitel 14)

Sei $f''(x,y)$ die Hessematrix der Funktion f an der Stelle (x,y).

Dann gilt:

$f''(x,y)$ ist positiv definit für alle (x,y) $\Rightarrow$ f ist strikt konvex

$f''(x,y)$ ist positiv semidefinit für alle (x,y) $\Leftrightarrow$ f ist konvex

$f''(x,y)$ ist negativ definit für alle (x,y) $\Rightarrow$ f ist strikt konkav

$f''(x,y)$ ist negativ semidefinit für alle (x,y) $\Leftrightarrow$ f ist konkav

f'' ist indefinit $\Leftrightarrow$ f ist weder konkav noch konvex.

Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

Produktionsfunktion

Kosten

$x, y \geq 0$

Marktpreis für Output

$$\pi(x,y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - (1,2 \cdot x + 0,6 \cdot y)$$

Erlös

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Faktorpreise : 1,2 für Input x
0,6 für Input y

Allgemein: $p \cdot x^c \cdot y^d - w_x \cdot x - w_y \cdot y$

zunächst $y = 5^4$ $\quad y^{\frac{1}{4}} = 5$ $\quad , 0{,}6 \cdot y = 0{,}6 \cdot 5^4$

$\Rightarrow$ univariate Zielfunktion

$$\tilde{\pi}(x) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot 5 - 1{,}2 \cdot x - 0{,}6 \cdot 5^4$$
$$= 60 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 1{,}2 \cdot x - 0{,}6 \cdot 5^4 \quad , x \geq 0$$

Allgemein: $p \cdot x^c \cdot y^d - w_x \cdot x - w_y \cdot y$

mit $c, d > 0$

Spezialfall: $\frac{c}{d} = \frac{w_x}{w_y}$

$\Rightarrow \quad x^* = y^*$

Falls $c + d < 1 \Rightarrow \pi$ ist strikt konkav

Falls $c + d = 1 \Rightarrow \pi$ ist schwach konkav

und es existiert kein Maximum.

$$\tilde{\pi}'(x) = 60 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 1{,}2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 30 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1{,}2 \qquad | : 0.6$$

$$\frac{30}{0{,}6} = \frac{300}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 \, x^{-\frac{1}{2}} = 2 \qquad | \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 = 2x^{\frac{1}{2}} \qquad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad x = (25)^2 = (5^2)^2 = 5^4$$

$$\pi(x,y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1{,}2 \cdot x - 0.6y$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\pi_1'(x,y) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1{,}2 \overset{!}{=} 0$$

$$\pi_2'(x,y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} - 0.6 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \, x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} = 1.2 \quad : 6$$

$$3 \, x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.6 \quad : 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} = 0.2 \\ x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.2 \end{array}}$$

$$\boxed{x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} \quad \Big| \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \; y^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \; y^{\frac{3}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \; y^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overbrace{x^{0}}^{=1} \cdot y^{1} = x^{1} \cdot \overbrace{y^{0}}^{=1}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= y \\ x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= y \\ x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= y \\ x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} &= 0.2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x^{-\frac{1}{4}} = 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= y \\ 5 &= x^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y = 5^4 \\ x = 5^4 \end{pmatrix}$$

Lösung der notwendigen Bedingungen 1. Ordnung

Berechnung der 2. Ableitungen.

$$\pi_1'(x,y) = 6\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{4}} - 1{,}2$$

$$\pi_2'(x,y) = 3\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 0.6$$

$$\pi_{11}''(x,y) = 6\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}\cdot y^{\frac{1}{4}} = -3\,x^{-\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}}$$

$$\pi_{12}''(x,y) = 6\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\tfrac{1}{4}\,y^{\frac{1}{4}-1} = \tfrac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\pi_{21}''(x,y) = 3\cdot\tfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\cdot y^{-\frac{3}{4}} = \tfrac{3}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\pi_{22}''(x,y) = 3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\tfrac{3}{4}\right)\cdot y^{-\frac{3}{4}-1} = -\tfrac{9}{4}\,x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{7}{4}}$$

Hessematrix:

$$\pi''(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{9}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$$

$$|\pi''| = -3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}}$$

$$- \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{27}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}-\frac{7}{4}} - \frac{9}{4}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{27}{4} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{4} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{27}{4} - \frac{9}{4} \right) \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^{3/2}} = \underbrace{\frac{9}{2} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^{3/2}}}_{>0} = | \pi'' |$$

$$\pi''_{11} = -3 x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}} = -3 \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \cdot y^{1/4} < 0$$

$|\pi''| > 0 \ , \ \pi''_{11} < 0 \Rightarrow \pi''$ negativ definit

$\Rightarrow \pi$ strikt konkav

$\Rightarrow$ innere stationäre Stelle $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 \\ 5^4 \end{pmatrix}$

ist ein striktes Maximum.

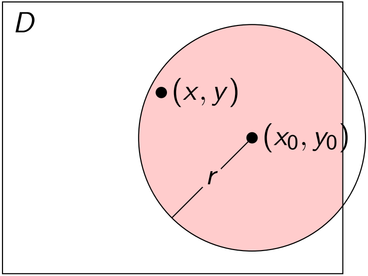
17.3 Lokale Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Punkt (x_0, y_0) ist eine **lokale Maximumstelle** von f in der Menge D, wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle Paare (x, y) in D mit geringerem Abstand zu (x_0, y_0), als r.

Wenn die Ungleichung strikt ist für alle $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, dann ist (x_0, y_0) eine **strikte** lokale Maximumstelle.

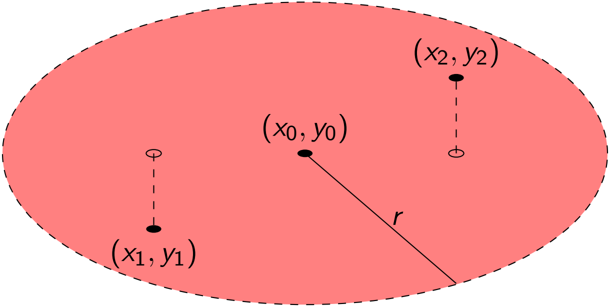
Ist die Ungleichung umgekehrt, handelt es sich bei (x_0, y_0) um eine **lokale Minimumstelle**, die ggf. strikt ist.



Sattelstelle

Eine stationäre Stelle, welche keine lokale Extremstelle ist, heißt Sattelstelle.

Eine Sattelstelle (x_0, y_0) hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl $r > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) in D im Umkreis r von (x_0, y_0) gibt mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.

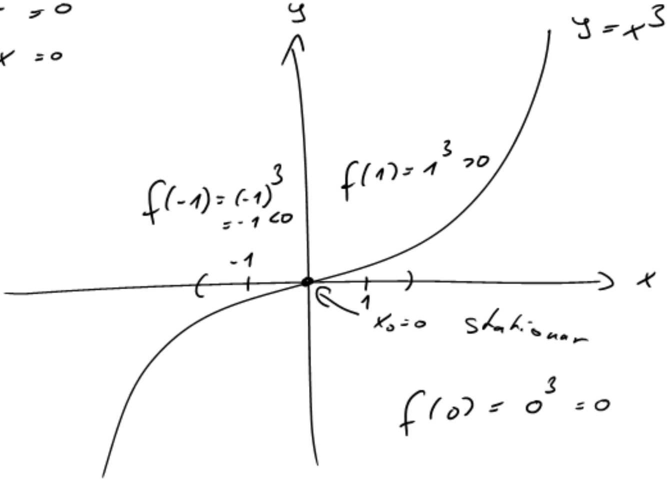


Sattelstelle für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

$y'' = 6x$



$f(0) = 0^3 = 0$

Test der zweiten Ableitungen auf lokale Extrema

Sei f zweimal stetig differenzierbar und sei (x_0, y_0) eine innere stationäre Stelle.

Es sei $f''(x_0, y_0)$ die Hessematrix von f an der Stelle (x_0, y_0).

(a) Wenn $|f''(x_0, y_0)| > 0$ und $f''_{11}(x_0, y_0) < 0$, wenn also $f''(x_0, y_0)$ negativ definit ist, dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Maximumstelle.

(b) Wenn $|f''(x_0, y_0)| > 0$ und $f''_{11}(x_0, y_0) > 0$, wenn also $f''(x_0, y_0)$ positiv definit ist, dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Minimumstelle.

(c) Wenn $|f''(x_0, y_0)| < 0$, dann ist (x_0, y_0) eine Sattelstelle.

(d) Wenn $|f''(x_0, y_0)| = 0$, dann kann (x_0, y_0) eine lokale Maximumstelle, eine lokale Minimumstelle oder eine Sattelstelle sein.

17.4 Beispiel: Diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen p_S und p_M verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_s) = \max\{6000 - 1000p_s, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise p_S^* und q_S^* maximieren den Gewinn der Mensa?

Welcher Preis p^* maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

$$\pi(p_S, p_M) = \underbrace{D_S(p_S)\cdot p_S + D_M(p_M)\cdot p_M}_{\text{Erlös}} - D_S(p_S) - D_M(p_M)$$

$$= D_S(p_S)\cdot(p_S - 1) + D_M(p_M)(p_M - 1)$$

Falls es eine Maximalstelle p_S^*, p_M^* gibt mit $p_S^*, p_M^* > 0$

dann muss $\pi_1'(p_S^*, p_M^*) = 0$ $\pi_2'(p_S^*, p_M^*) = 0$ gelten.

$$\pi_1'(p_S, p_M) = \frac{\partial\left(D_S(p_S)(p_S - 1)\right)}{\partial p_S} = D_S'(p_S)(p_S - 1) + D_S(p_S)$$

$D'(p_S)$

$$= -1000\cdot(p_S - 1) + 6000 - 1000\, p_S$$

$$= -2000\cdot p_S + 7000 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 7000 = 2000\, p_S \Leftrightarrow p_S = \frac{7}{2}$$

$$\pi_2'(p_S, p_M) = \frac{\partial\big(D_M(p_M)(p_M - 1)\big)}{\partial p_M}$$

$D_M(p_M) = 1000 - 100p_M$

$$= D_M'(p_M)(p_M - 1) + D_M(p_M)$$

$$= -100(p_M - 1) + 1000 - 100p_M$$

$$= \boxed{-200p_M + 1100} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1100 = 200p_M$$

$$\Leftrightarrow \quad p_M = \frac{11}{2}$$

Einzige stationäre Stelle: $(p_S^*, p_M^*) = \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Berechnung der Hessematrix:

$$\pi''(p_S, p_M) = \begin{pmatrix} -2000 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix}$$

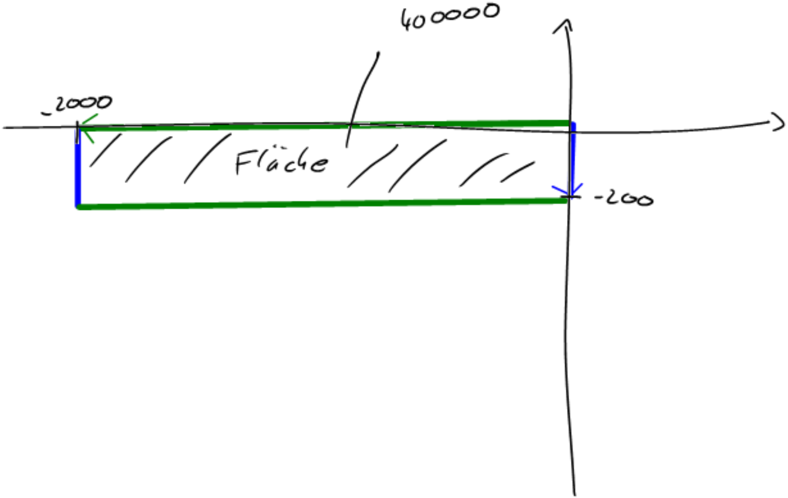
$$|\pi''(p_S, p_M)| = (-2000) \cdot (-200) - 0 \cdot 0$$
$$= 400000 > 0$$

$$\pi''_{11}(p_S, p_M) = -2000 < 0$$

$\left.\right\}$ π'' negativ definit

$\Rightarrow$ π strikt konkav $\Rightarrow$ innere stationäre Stellen sind Max-Stellen.

$$\begin{pmatrix} -2000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \end{pmatrix}$$



zum Vergleich: nur ein Preis p

$$\tilde{\pi}(p) = (6000 - 1000p)(p-1) + (1000 - 100p)(p-1)$$

$$= (6000 - 1000p + 1000 - 100p)(p-1)$$

$$= (7000 - 1100p)(p-1)$$

$$\tilde{\pi}'(p) = -1100(p-1) + (7000 - 1100p) \cdot 1$$

$$= -2200 \cdot p + 8100 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8100 = 2200p$$

$$\Leftrightarrow \quad p^* = \frac{81}{22} \approx 4 > \frac{7}{2}$$

$$\tilde{\pi}''(p) = -2200 < 0 \Rightarrow \tilde{\pi} \text{ str. konkav}$$

$$\Rightarrow \quad p^* = \frac{81}{22} \text{ Max-Stelle.}$$

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

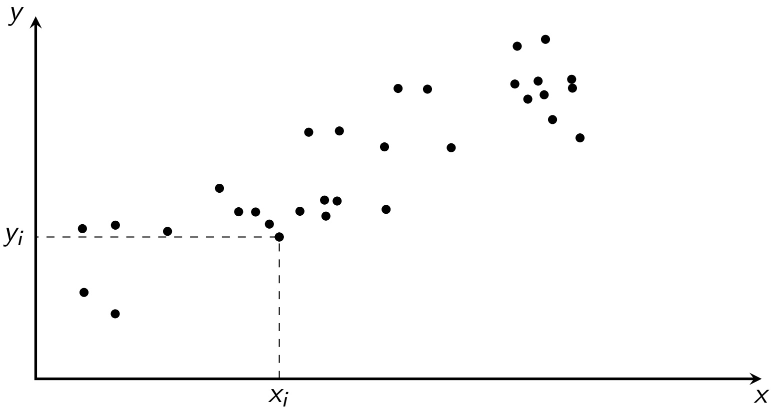
$$|H| = a \cdot c - b \cdot b > 0 \iff a \cdot c > b \cdot b \geq 0$$

$$a > 0 \Rightarrow c > 0$$

$$c > 0 \Rightarrow a > 0$$

17.4 Einfache Lineare Regression

Schätzung des statistischen Zusammenhangs zwischen einer erklärenden Variablen („Regressor“, x) und einer erklärten Variablen („Regressand“, y).



Einfache Lineare Regression

Stichprobe mit Umfang n:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}\text{: Regressand}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}\text{: Regressor}}$$

Es gelte $x_i \neq x_j$ für mindestens ein $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Modell:

$$y_i = \alpha + x_i \cdot \beta + \epsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

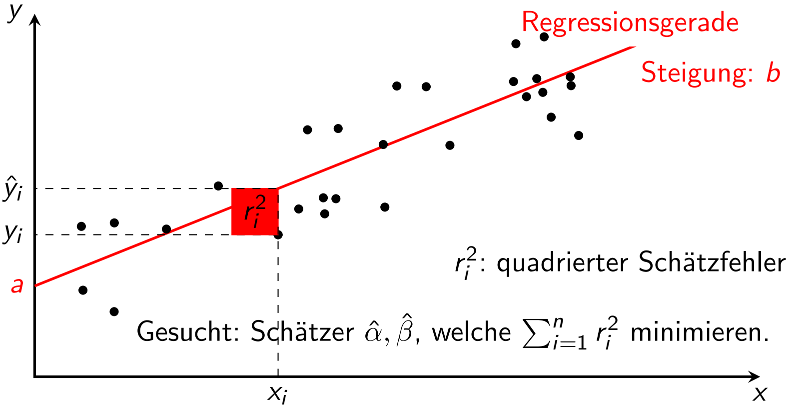
Unbekannte Parameter α, β

Unbekannter Störterm ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$

Einfache Lineare Regression – Grafische Darstellung

Vermutete Parameter: a, b $\quad\quad \rightarrow$ Prognose $\hat{y}_i = a + bx_i$

Schätzfehler (hängt von a, b ab): $r_i = y_i - \hat{y}_i$



Einfache Lineare Regression

Zielfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i)^2$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \\ f_2'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}$$

Einfache Lineare Regression

Sei $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ein stationärer Punkt von f.

Hinreichende Bedingungen für ein Minimum:

- $f''_{11} = 2n > 0$ ✓
- $f''_{22} = 2n\overline{xx} > 0$ ✓
- $f''_{11}f''_{22} = (2n)^2 \cdot \overline{xx} > (2n)^2 \cdot \bar{x}^2 = f''_{12}f''_{21} \Leftrightarrow \overline{xx} - \bar{x}\bar{x} > 0$ ✓

$\Rightarrow$ f ist streng konvex in a, b

$\Rightarrow$ der innere stationäre Punkt $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ist eine Minimumstelle.

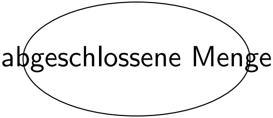
17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge D ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

$x^2 + y^2 < 1$

Rand ist nicht in der Menge

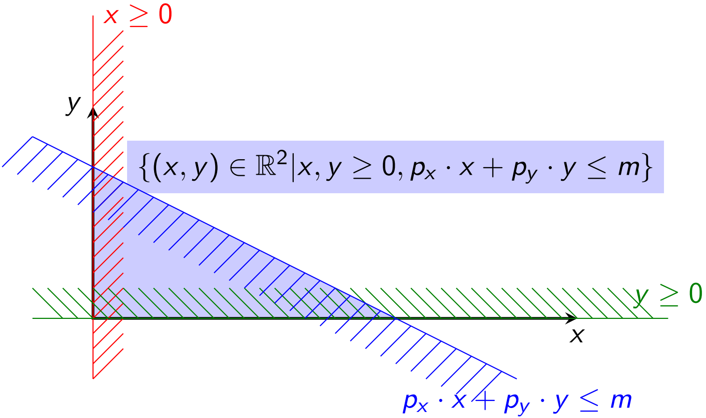
Eine Menge D ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



$x^2 + y^2 \leq 1$

Rand ist in der Menge

Beispiel: Budgetmenge



Schwache Ungleichungen:

$\Rightarrow$ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

$\Rightarrow$ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius $r < \infty$ gibt, der D vollständig enthält.

Beispiel Budgetmenge:

Wähle $r = \max\left\{\frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y}\right\}$. Der Mittelpunkt des Kreises sei $(0, 0)$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

17.5 Der Extremwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Stelle $(a, b) \in D$, an der f ein Minimum hat und es existiert eine Stelle $(c, d) \in D$, an der f ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \; \forall \; (x, y) \in D$$

Bemerkung:

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an D sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für $D = \mathbb{R}^2_{\geq}$ die Funktion $f(x, y) = -x - y$ ein Maximum an der Stelle $(0, 0)$, $\mathbb{R}^2_{\geq}$ ist aber nicht beschränkt.

Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion f, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

(i) Bestimme alle stationären Stellen von f im Innern von D.

(ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von f auf allen Teilstücken des Randes von D und die zugehörigen Stellen.

(iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von f in D. Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in D.

Belindas optimale Konsumentscheidung

Belinda habe die Nutzenfunktion $u(x, y) = x^2 \cdot y$ für $x, y \geq 0$.

Ihre Budgetbedingung lautet $x + y \leq 3$.

Die Menge $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 3\right\}$ ist nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Die Funktion u ist stetig auf D.

Es existiert demnach eine Maximalstelle. (Extremwertsatz)

Wie lautet die optimale Konsumentscheidung?

1) Innere stationäre Stellen:

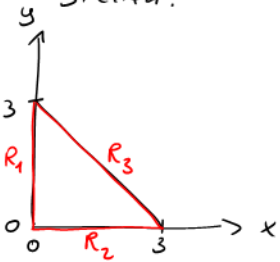
$U(x,y) = x^2 \cdot y$

$U'_1(x,y) = 2x \cdot y \overset{!}{=} 0 \iff x=0 \vee y=0$

$\Rightarrow$ alle stationären Stellen liegen auf dem Rand

$\Rightarrow$ es gibt keine inneren stationären Stellen.

2) Rand



R_1: $x=0$

$\Rightarrow U(x,y) = 0^2 \cdot y = 0$

R_2: $y=0$

$\Rightarrow U(x,y) = x^2 \cdot 0 = 0$

Falls $x, y > 0$

$\Rightarrow U(x,y) = x^2 \cdot y > 0$

Randsegment R_3

$$R_3 = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y=3\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 3-x$$

$$g(x) = U(x, 3-x) = x^2 \cdot (3-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 3$$
$$= 3x^2 - x^3$$

$$g'(x) = 6x - 3\cdot x^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ 6-3x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=2$$

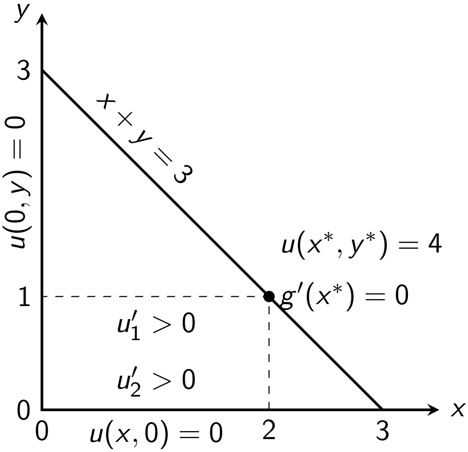
$$g(0) = 3\cdot 0^2 - 0^3 = 0$$
$$g(2) = 3\cdot 2^2 - 2^3 = 3\cdot 4 - 8 = 12-8 = 4$$
$$g(3) = 3\cdot 3^2 - 3^3 = 27-27 = 0$$

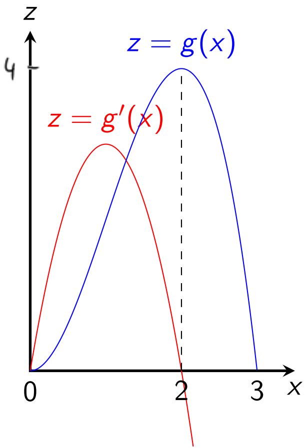
$\Rightarrow \quad x=2$ Max-Stelle von g

$\Rightarrow \quad y = 3-x = 3-2 = 1$, $(x,y) = (2,1)$ ist Max-Stelle von U.

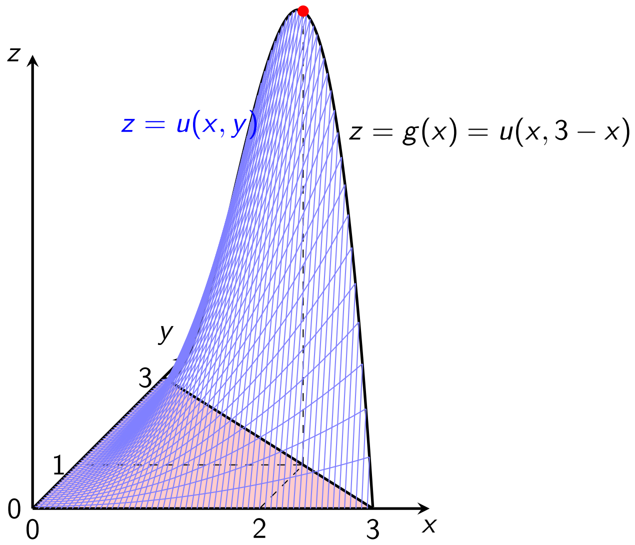
Belindas optimale Konsumentscheidung

$$u(x,y) = x^2 y, \quad g(x) = x^2(3-x), \quad g'(x) = 3x(2-x)$$
$$D = \{x, y \geq 0 : x + y \leq 3\}$$





Belindas optimale Konsumentscheidung



Ein nützliches Resultat

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und Wertebereich $R = f(D)$.

Sei $g : R \to \mathbb{R}$ und sei (x^*, y^*) in D.

Definiere $h : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = g(f(x, y))$.

(a) Wenn g monoton wachsend ist und (x^*, y^*) die Funktion f maximiert, dann maximiert dieselbe Stelle (x^*, y^*) auch h.

(b) Wenn g strikt monoton wachsend ist, dann maximiert (x^*, y^*) die Funktion f genau dann, wenn (x^*, y^*) die Funktion h maximiert.

Bsp: $\tilde{U}(x,y) = x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$

$$(\tilde{U}(x,y))^3 = \left(x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{2}{3}\cdot 3} \cdot y^{\frac{1}{3}\cdot 3} = x^2 \cdot y$$

$$\ln\left(x^2 \cdot y\right) = \ln(x^2) + \ln(y)$$

$$= 2\ln(x) + \ln(y)$$

$$\max_{x,y} \quad 2\ln(x) + \ln(y) \quad \text{u.d.B} \quad x + y = 3$$

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Für $(x, r) \in D$ bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x \; f(x, r)$$

bezeichne $x^*(r)$ den Wert x, welcher f bei gegebenem Parameter r maximiert.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge $x \geq 0$, Preis r, Kosten $C(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \pi(x, r) = rx - x^2$$

Bedingung erster Ordnung für x:

$$\pi_1'(x, r) = r - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

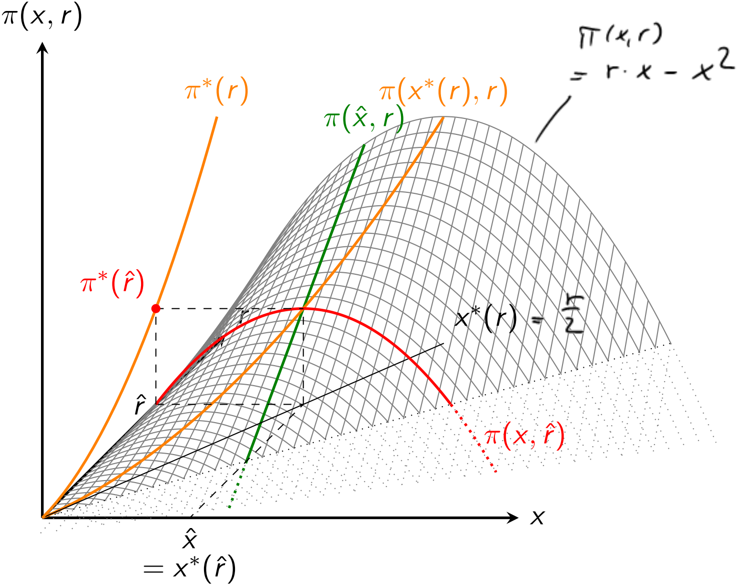
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{d\,\pi^*(r)}{dr} = \frac{2r}{4} = \frac{r}{2}$$

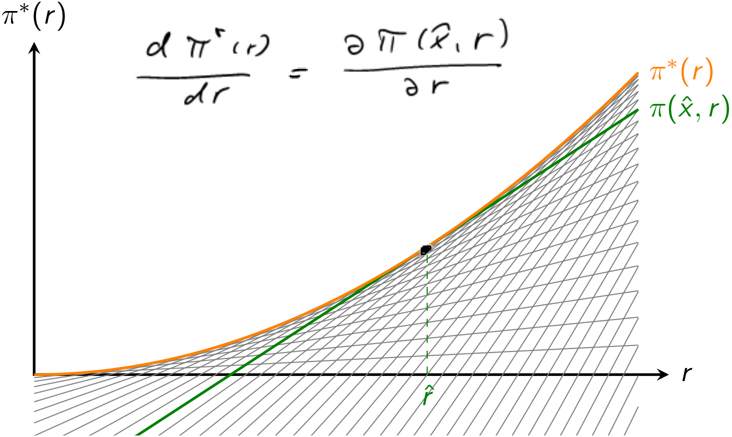
Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende" $\pi^*(r)$



Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende" $\pi^*(r)$

Steigung ist gleich:

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{\partial \pi(\hat{x}, r)}{\partial r}$$



An der Stelle $\hat{r}$ sind $\pi^*(r)$ und $\pi(\hat{x}, r)$ tangential!

Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

wobei x eine Variable und r einen Parameter bezeichnet.

Sei $x^*(r)$ der Wert von x, der $f(x, r)$ für r maximiert und sei $(x^*(r), r)$ ein innerer Punkt von D. Für $f^*(r) := f(x^*(r), r)$ gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Beweis: Kettenregel:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \underbrace{\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x}}_{=0} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Da $x^*(r)$ der Wert von x ist, welcher $f(x, r)$ maximiert, gilt $\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0$.

Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge $x^*(r)$ bei gegebenem Preis r:

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

Zusammenfassung

- Notwendige Bedingung: Stationäre Stelle
- Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:
  Hesse neg. semidef. $\Leftrightarrow$ Konkav $\Rightarrow$ Maximum
  Hesse pos. semidef. $\Leftrightarrow$ Konvex $\Rightarrow$ Minimum
- Lokale Extremstellen, Sattelstellen
- Beispiel: Gewinnmaximierung, Lineare Regression
- Extremwertsatz
  offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- Beispiel: Belindas Konsumentscheidung
- Envelope-Theorem
  Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion