Vorlesung zu Kapitel 15:[1]

Partielle Ableitungen im Einsatz

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

15.1 Eine einfache Kettenregel

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t)$ und $y = h(t)$ ist, dann gilt

$$\frac{dz}{dt} = f_1'(x, y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x, y)\frac{dy}{dt}$$

Diese Ableitung heißt die **totale Ableitung** von z bezüglich t.

Beispiel

Alfreds Nutzen aus dem Konsum von Pasta ($x > 0$) und Parmesan ($y > 0$) sei gegeben durch:

$$u(x, y) = 2\ln(x) + \ln(y)$$

Die Menge von Pasta x und Parmesan y hängt von Alfreds Einkommen $m > 0$ ab:

$$x(m) = \frac{2}{3} \cdot m \qquad y(m) = \frac{1}{3} \cdot m$$

Bestimme $\frac{du}{dm}$!

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t, s)$ und $y = h(t, s)$, dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial t}$$

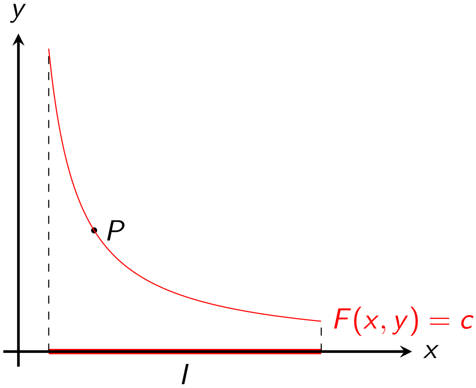
und

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial s}$$

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

Wenn $F(x,y) = c$ und $F_2'(x,y) \neq 0$, dann gilt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)}$$



15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y, definiert in einem Definitionsbereich D, heißt **homogen vom Grad** k, wenn für alle $(x, y) \in D$

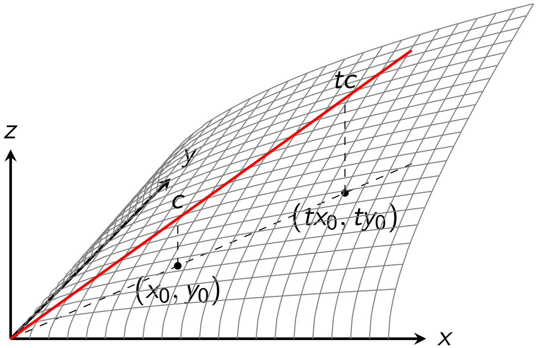
$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

für alle $t > 0$.

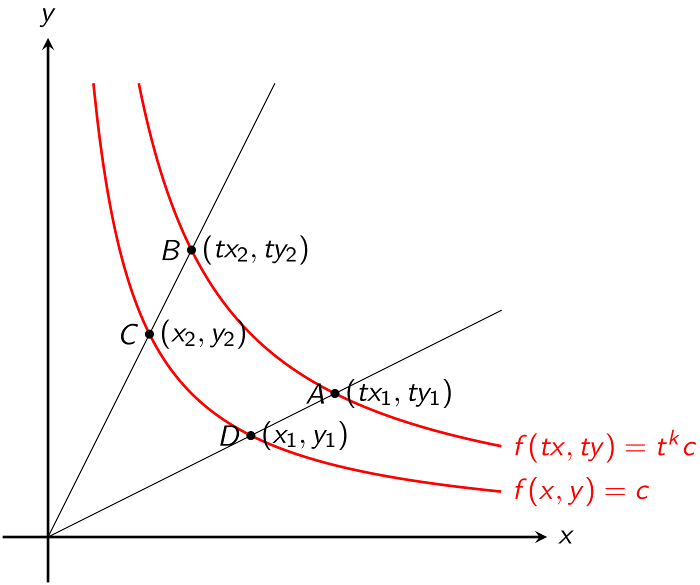
Die Multiplikation beider Variablen mit einem positiven Faktor t wird den Wert der Funktion mit dem Faktor t^k multiplizieren.

Geometrische Aspekte homogener Funktionen

Sei $f(x, y)$ homogen vom Grad $k = 1$.



Höhenlinien für eine homogene Funktion



15.8 Lineare Approximation

Wiederholung: Funktionen einer Variablen

Die lineare Approximation von $f(x)$ um (x_0) ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

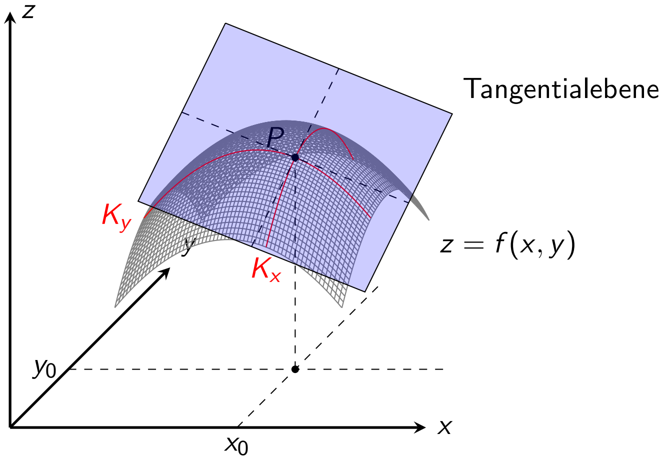
Die lineare Approximation von $f(x, y)$ um (x_0, y_0) ist

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Die Tangentialebene

Im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ hat die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ die Gleichung

$$z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0)$$



15.9 Differentiale und Zuwächse

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Seien $dx, dy \in \mathbb{R}$.

Das **Differential** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y):

$$dz \text{ oder } df = f_1'(x, y)dx + f_2'(x, y)dy$$

Der **Zuwachs** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y):

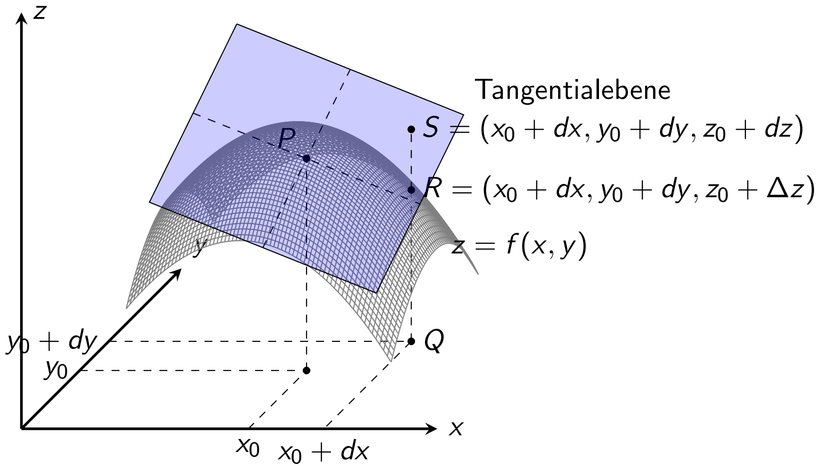
$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

Falls $|dx|$ und $|dy|$ klein:

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_1'(x, y)dx + f_2'(x, y)dy \Leftrightarrow \Delta z \approx dz$$

Das Differential dz und der Zuwachs Δz

$$S_z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{f_1'(x_0, y_0)dx + f_2'(x_0, y_0)dy}_{dz}$$



15.10 Gleichungssysteme: Freiheitsgrade

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ seien $n \in \mathbb{N}$ Variablen.

Wenn es keine Restriktion an diese Variablen gibt, so gibt es n **Freiheitsgrade**.

Müssen diese Variablen eine Gleichung der Form

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllen, so gibt es noch $n - 1$ Freiheitsgerade.

Für jede weitere „unabhängige" Restriktion wird die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 reduziert.

n Variablen mit m Restriktionen

n Variablen erfüllen ein System von m „unabhängigen“ Restriktionen, falls

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
\vdots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{gathered}
$$

Falls $m < n$, so verbleiben $n - m$ Freiheitsgrade.

Feiheitsgrade und Unabhängige Restriktionen

Ein System von m Restriktionen ist **unabhängig**, falls keine der m Restriktionen durch die anderen $m - 1$ Restriktionen impliziert wird.

Ein System von Gleichungen mit n Variablen hat k **Freiheitsgrade**, wenn es eine Menge von k Variablen gibt, die frei gewählt werden können, während die restlichen $n - k$ Variablen eindeutig bestimmt sind, sobald den k freien Variablen spezielle Werte zugeordnet wurden.

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

$$5u + 5v = 2x - 3y$$

$$2u + 4v = 3x - 2y$$

Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und vier Variablen
$\rightarrow$ zwei Freiheitsgrade

Wir können zwei Variablen frei wählen, die restlichen zwei Variablen sind dann eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel können wir x und y frei wählen;
u und v sind dann Funktionen von x und y.

Durch das Differenzieren des Gleichungssystems nach x und y können wir die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y berechnen, ohne das Gleichungssystem zu lösen.

Endogene und exogene Variablen

Im vorangegangenen Beispiel sind x und y **exogene** Variablen, d.h. Parameter die in das ökonomische Modell einfließen und

es sind u und v **endogene** Variablen, d.h. Größen, die vom ökonomischen Modell erklärt werden.

Das ökonomische Modell hat die Form von **strukturellen Gleichungen**:

$$f_1(u, v, x, y) = 0$$

$$f_2(u, v, x, y) = 0$$

Sei (u_0, v_0) eine Lösung der beiden Gleichungen bei gegebenen Parametern (x_0, y_0).

Implizite Definition und reduzierte Form

Das strukturelle Modell

$$f_1(u, v, x, y) = 0$$

$$f_2(u, v, x, y) = 0$$

definiert die Variablen u und v **implizit** als Funktionen der Parameter x und y:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Diese Gleichungen heißen **reduzierte Form** des Modells.

Zusammenfassung

- Totale Ableitung
- Implizites Differenzieren
- Homogenität, konstante Skalenerträge
- Lineare Approximation
- Differentiale und Zuwächse
- Komparative Statik mit Gleichungssystemen