Vorlesung zu Kapitel 15:[1]

Partielle Ableitungen im Einsatz

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Wiederholung: Kettenregel

äußere Funktion f

innere Funktion g

verkettete Funktion $f(g(x))$

Ableitung: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

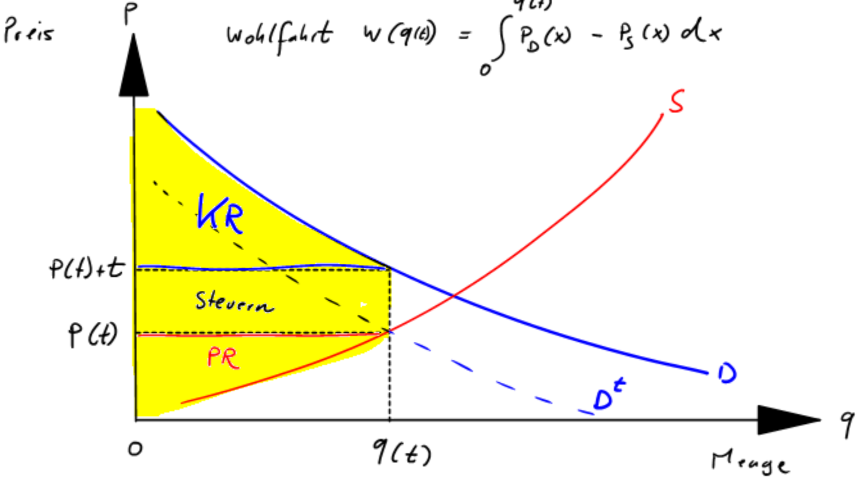
Marktgleichgewicht mit Mengensteuer t

$$p = p_S(q) \quad \text{inverse Angebotsfunktion}$$

$$p + t = p_D(q) \quad \text{inverse Nachfragefunktion}$$

$\Rightarrow$ Lösung $q(t)$, $p(t)$

Wohlfahrt $W(q(t)) = \int_0^{q(t)} p_D(x) - p_S(x)\,dx$



$$W(q(t)) = \int_0^{q(t)} P_D(x) - P_S(x)\, dx$$

$$\frac{d\, W(q(t))}{dt} = \boxed{\frac{d\, W(q)}{dq}} \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(P_D(q(t)) - P_S(q(t))\right)}}_{= t} \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d\, W(q(t))}{dt} = t \cdot \frac{dq(t)}{dt}$$

15.1 Eine einfache Kettenregel

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t)$ und $y = h(t)$ ist, dann gilt

innere Ableitungen

$$\frac{dz}{dt} = f_1'(x, y)\frac{dx}{dt} + f_2'(x, y)\frac{dy}{dt}$$

äußeren Ableitungen

Diese Ableitung heißt die **totale Ableitung** von z bezüglich t.

Beispiel

Alfreds Nutzen aus dem Konsum von Pasta ($x > 0$) und Parmesan ($y > 0$) sei gegeben durch:

$$u(x,y) = 2\ln(x) + \ln(y)$$

Die Menge von Pasta x und Parmesan y hängt von Alfreds Einkommen $m > 0$ ab:

$$x(m) = \frac{2}{3} \cdot m \qquad y(m) = \frac{1}{3} \cdot m$$

Bestimme $\frac{du}{dm}$!

$$\frac{du}{dm} = u_1'(x,y) \cdot \frac{dx}{dm} + u_2'(x,y) \cdot \frac{dy}{dm}$$

$$u_1'(x,y) = 2 \cdot \frac{1}{x} \qquad u_2'(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$x'(m) = \frac{2}{3} \qquad y'(m) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dU}{dm} = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}}$$

Losungsverfahren durch Substitution

$$x(m) = \frac{2}{3}m \qquad y(m) = \frac{1}{3}m$$

$$U(x,y) = 2\ln(x) + \ln(y)$$

$$U(m) = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{3}m\right) + \ln\left(\frac{1}{3}m\right)$$

$$U'(m) = 2\cdot\frac{1}{\frac{2}{\cancel{3}}\cdot m}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + \frac{1}{\frac{1}{\cancel{3}}m}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = 2\cdot\frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \boxed{\frac{3}{m}}$$

---

zum Vergleich

$$\frac{4}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y} = \frac{4}{\cancel{3}}\,\frac{1}{\frac{2}{\cancel{3}}\cdot m} + \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{1}{\frac{1}{\cancel{3}}m} = \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}$$

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t, s)$ und $y = h(t, s)$, dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial t}$$

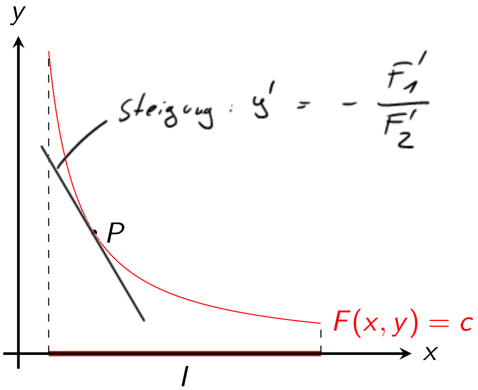
und

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1'(x, y)\frac{\partial x}{\partial s} + f_2'(x, y)\frac{\partial y}{\partial s}$$

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

Wenn $F(x, y) = c$ und $F_2'(x, y) \neq 0$, dann gilt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x, y)}{F_2'(x, y)}$$



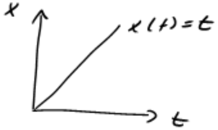
$$\underbrace{x\cdot y^2}_{F(x,y)} = \underbrace{5}_{c}$$

$$F_1'(x,y) = y^2$$

$$F_2'(x,y) = x\cdot 2\cdot y$$

$$y' = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = -\frac{y^2}{x\cdot 2\cdot y} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$$

$F(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$



$$\frac{dF}{dt} = F_1'\cdot x'(t) + F_2'\cdot y'(t)$$

Spezialfall $x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$

Begründung: Höhenlinie

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = F_1' + F_2'\cdot y'(x) = 0$$

$$F_2'\cdot y'(x) = -F_1'$$

falls $F_2' \neq 0$

$$y'(x) = -F_1' / F_2'$$

15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y, definiert in einem Definitionsbereich D, heißt **homogen vom Grad** k, wenn für alle $(x, y) \in D$

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

für alle $t > 0$.

Die Multiplikation beider Variablen mit einem positiven Faktor t wird den Wert der Funktion mit dem Faktor t^k multiplizieren.

Beispiel Cobb - Douglas - Funktion

$$f(x,y) = x^c \cdot y^d$$

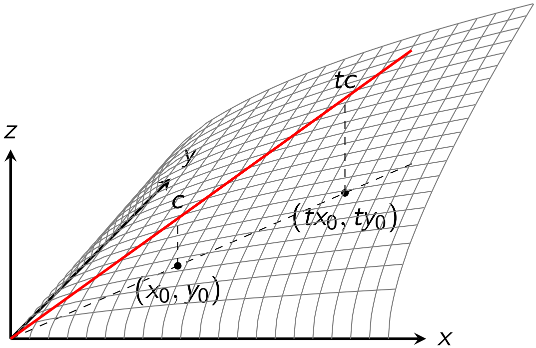
$$f(t \cdot x, t \cdot y) = (t \cdot x)^c \cdot (t \cdot y)^d$$
$$= t^c \cdot x^c \cdot t^d \cdot y^d$$
$$= t^c \cdot t^d \cdot \underbrace{x^c \cdot y^d}_{f(x,y)}$$
$$= t^{c+d} \cdot f(x,y)$$

f ist homogen vom Grad $c+d$.

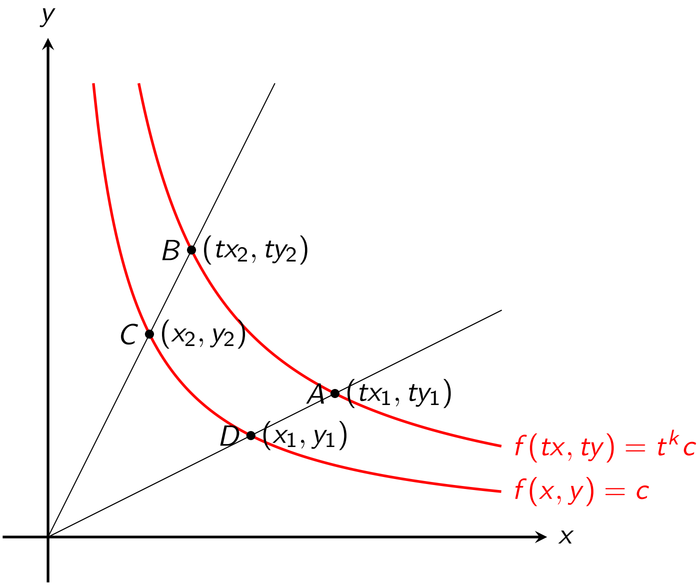
$c+d=1$: Konstante Skalenerträge

Geometrische Aspekte homogener Funktionen

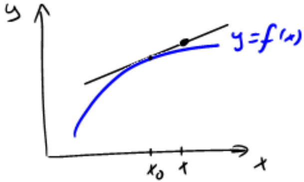
Sei $f(x, y)$ homogen vom Grad $k = 1$.



Höhenlinien für eine homogene Funktion



15.8 Lineare Approximation



Wiederholung: Funktionen einer Variablen

Die lineare Approximation von $f(x)$ um (x_0) ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

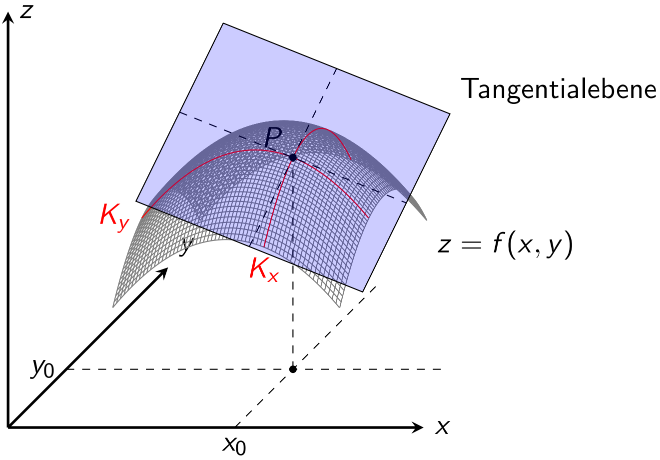
Die lineare Approximation von $f(x, y)$ um (x_0, y_0) ist

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \underbrace{f_1'(x_0, y_0)\underbrace{(x - x_0)}_{dx} + f_2'(x_0, y_0)\underbrace{(y - y_0)}_{dy}}_{dz}$$

Die Tangentialebene

Im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ hat die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ die Gleichung

$$z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0)$$



15.9 Differentiale und Zuwächse (Differenz)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Seien $dx, dy \in \mathbb{R}$.

Das **Differential** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y):

$$dz \text{ oder } df = f_1'(x, y)dx + f_2'(x, y)dy$$

Der **Zuwachs** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y):
(Differenz)

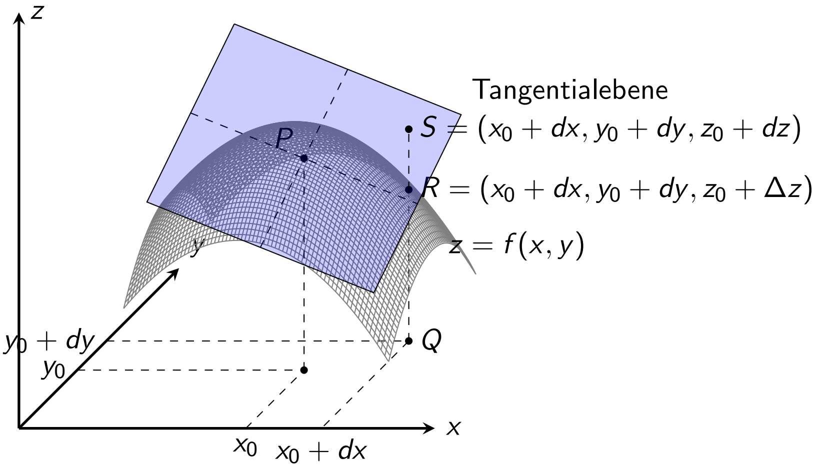
$$\underset{\text{Delta}}{\Delta} z = \underbrace{f(x + dx, y + dy)}_{\text{neuer Funktionswert}} - \underbrace{f(x, y)}_{\text{alter Funktionswert}}$$

Falls $|dx|$ und $|dy|$ klein:

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_1'(x, y)dx + f_2'(x, y)dy \Leftrightarrow \Delta z \approx dz$$

Das Differential dz und der Zuwachs Δz

$$S_z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{f_1'(x_0, y_0)dx + f_2'(x_0, y_0)dy}_{dz}$$



15.10 Gleichungssysteme: Freiheitsgrade

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ seien $n \in \mathbb{N}$ Variablen.

Wenn es keine Restriktion an diese Variablen gibt, so gibt es n **Freiheitsgrade**.

Müssen diese Variablen eine Gleichung der Form

Gleichung 1

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllen, so gibt es noch $n - 1$ Freiheitsgerade.

Für jede weitere „unabhängige" Restriktion wird die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 reduziert.

n Variablen mit m Restriktionen

n Variablen erfüllen ein System von m „unabhängigen“ Restriktionen, falls

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

Falls $m < n$, so verbleiben $n - m$ Freiheitsgrade.

Feiheitsgrade und Unabhängige Restriktionen

Ein System von m Restriktionen ist **unabhängig**, falls keine der m Restriktionen durch die anderen $m - 1$ Restriktionen impliziert wird.

Ein System von Gleichungen mit n Variablen hat k **Freiheitsgrade**, wenn es eine Menge von k Variablen gibt, die frei gewählt werden können, während die restlichen $n - k$ Variablen eindeutig bestimmt sind, sobald den k freien Variablen spezielle Werte zugeordnet wurden.

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
(1) & 4x & + & 5y & - & 2z & = & 7 \\
(2) & -1x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\
(3) & 3x & + & 7y & + & z & = & 12
\end{array}
$$

Alle (x, y, z), die (1) & (2) erfüllen, erfüllen auch (3)

$\Rightarrow$ 2 unabhängige Restriktionen.

$\Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad

Marktgleichgewicht mit Steuern

Variablen:

Menge	q
Preis	p
Steuer	t

strukturelle Form

reduzierte Form

Restriktionen:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} p &= P_S(q) \\ p+t &= P_D(q) \end{aligned}}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} q(t) \\ p(t) \end{array}$$

Lösung

$\Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

Lösung: $u(x,y)$

$v(x,y)$

$$5u + 5v = 2x - 3y$$

$$2u + 4v = 3x - 2y$$

Gesucht: u_1', u_2'

v_1', v_2'

Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und vier Variablen
→ zwei Freiheitsgrade

Wir können zwei Variablen frei wählen, die restlichen zwei Variablen sind dann eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel können wir x und y frei wählen;
u und v sind dann Funktionen von x und y.

Durch das Differenzieren des Gleichungssystems nach x und y können wir die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y berechnen, ohne das Gleichungssystem zu lösen.

Endogene und exogene Variablen

Im vorangegangenen Beispiel sind x und y **exogene** Variablen, d.h. Parameter die in das ökonomische Modell einfließen und

es sind u und v **endogene** Variablen, d.h. Größen, die vom ökonomischen Modell erklärt werden.

Das ökonomische Modell hat die Form von **strukturellen Gleichungen**:

$$f_1(u, v, x, y) = 0$$

$$f_2(u, v, x, y) = 0$$

Sei (u_0, v_0) eine Lösung der beiden Gleichungen bei gegebenen Parametern (x_0, y_0).

Strukturelles Marktmodell mit Steuern

(1) $$p(t) = P_S(q(t))$$

(2) $$p(t) + t = P_D(q(t))$$

---

implizites Ableiten

(1)' $$p'(t) = P_S'(q(t)) \cdot q'(t)$$

(2)' $$p'(t) + 1 = P_D'(q(t)) \cdot q'(t)$$

$$\Rightarrow \quad P_S' \cdot q'(t) + 1 = P_D' \cdot q'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = P_D' \cdot q'(t) - P_S' \cdot q'(t)$$

$$= (\underbrace{P_D'}_{<0} - \underbrace{P_S'}_{>0}) \cdot q'(t)$$

$$\Rightarrow \quad q'(t) = 1/(P_D' - P_S') < 0$$

Implizite Definition und reduzierte Form

Das strukturelle Modell

$$f_1(u, v, x, y) = 0$$

$$f_2(u, v, x, y) = 0$$

definiert die Variablen u und v **implizit** als Funktionen der Parameter x und y:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Diese Gleichungen heißen **reduzierte Form** des Modells.

Zusammenfassung

- Totale Ableitung
- Implizites Differenzieren
- Homogenität, konstante Skalenerträge
- Lineare Approximation
- Differentiale und Zuwächse
- Komparative Statik mit Gleichungssystemen