

Funktionen mehrerer Variablen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

14.3 Geometrische Darstellung

14.4 Flächen

14.5 Funktionen von n Variablen

~~14.6 Partielle Ableitungen bei mehreren Variablen~~

14.7 Konvexe Mengen

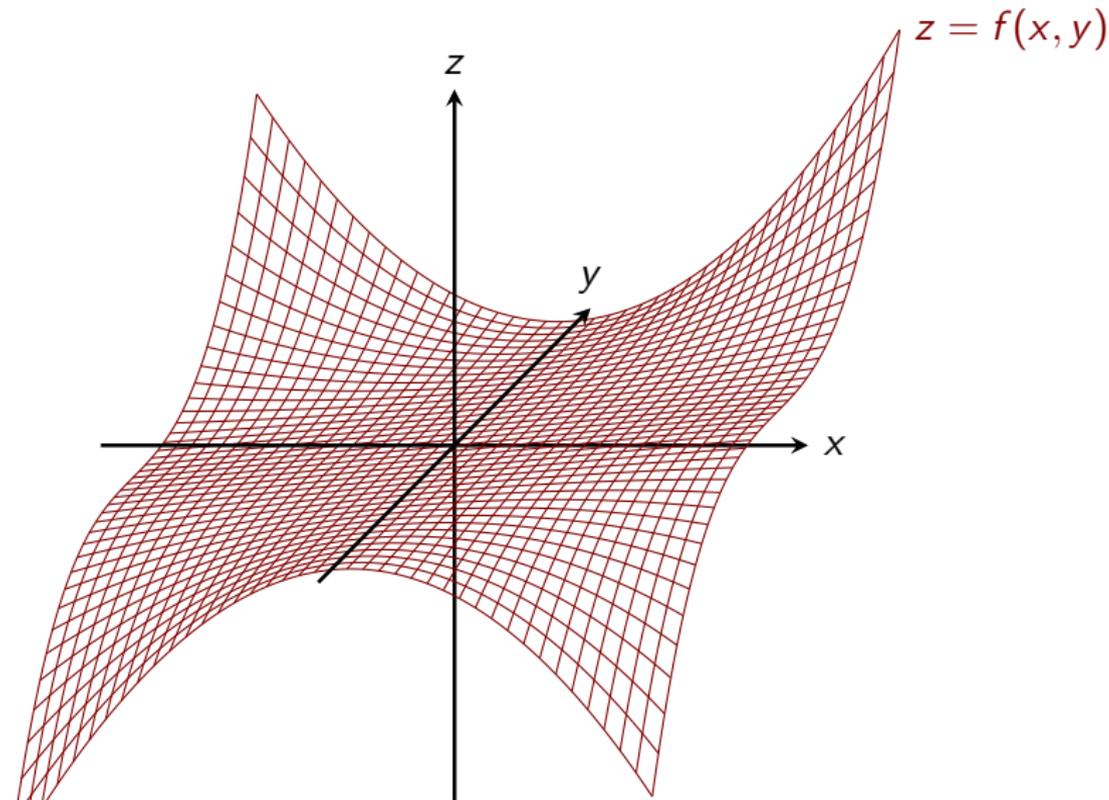
14.8 Konkave und konvexe Funktionen

~~14.9 Ökonomische Anwendung: Produktionsfunktion~~

~~14.10 Partielle Elastizitäten~~

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Beispiel: $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

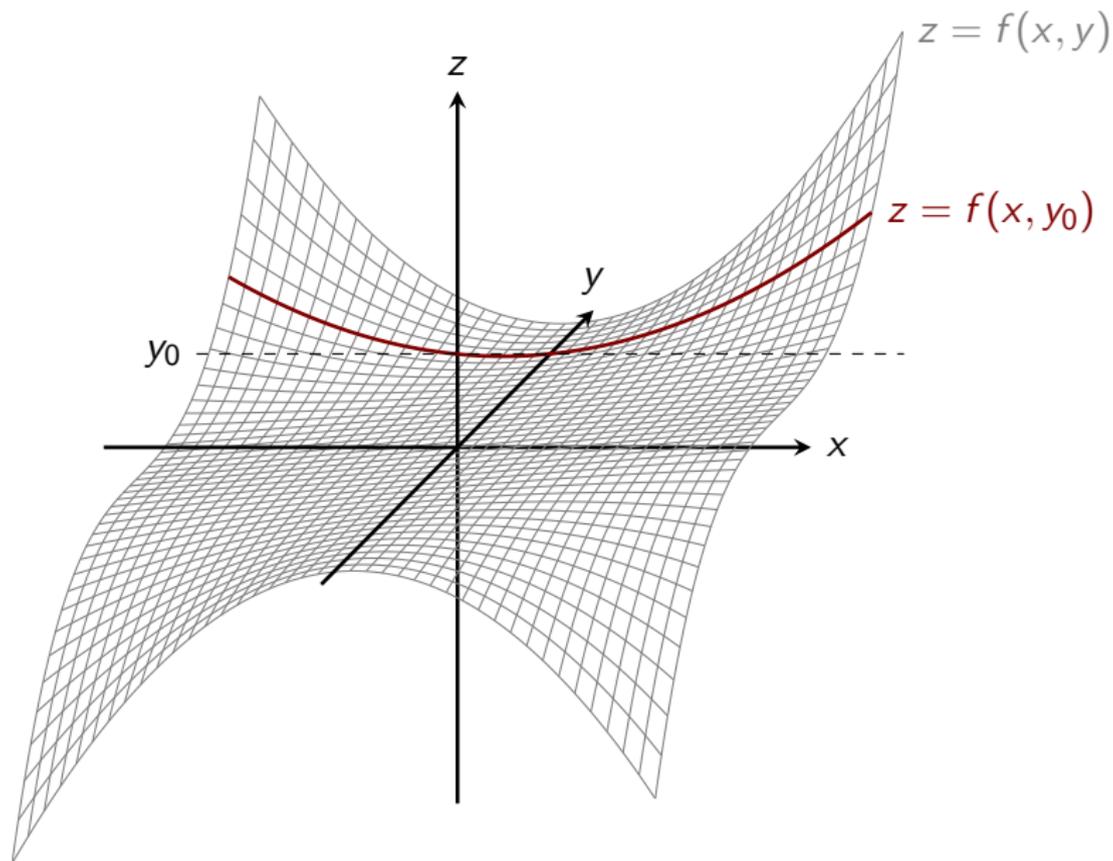
Falls $z = f(x, y)$, dann ist

- ▶ $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x , wenn y konstant gehalten wird.
- ▶ $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y , wenn x konstant gehalten wird.

Definition:

- ▶ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_1(x, y) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
- ▶ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_2(x, y) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

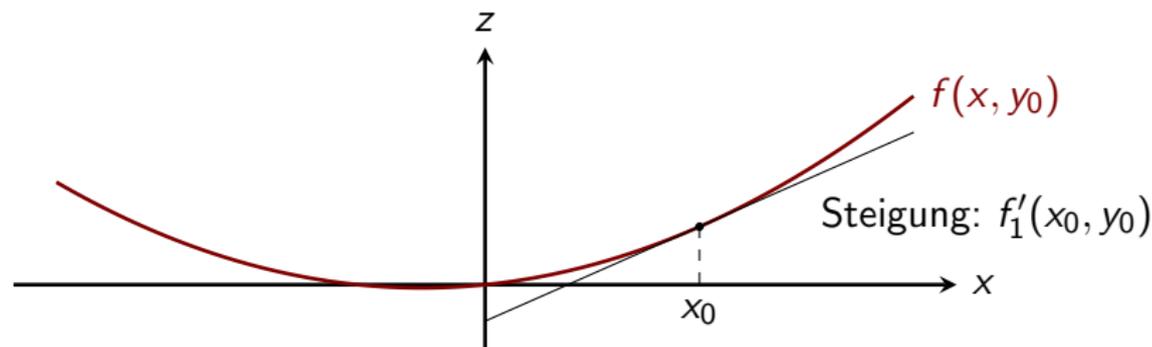
Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



Partielle Ableitung nach x

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



$$f'_1(x, y_0) = 2 + 2xy_0^3$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

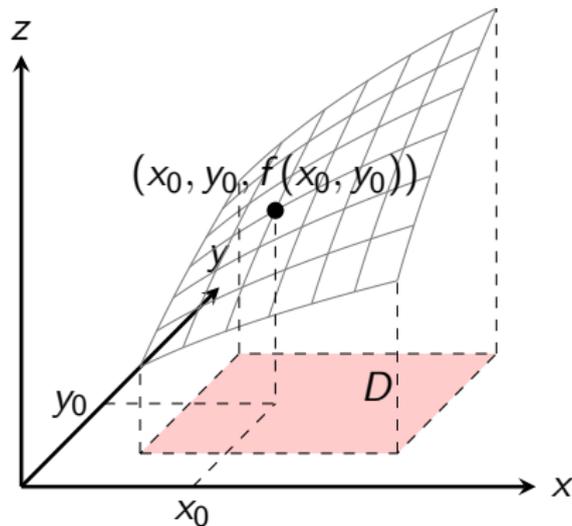
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

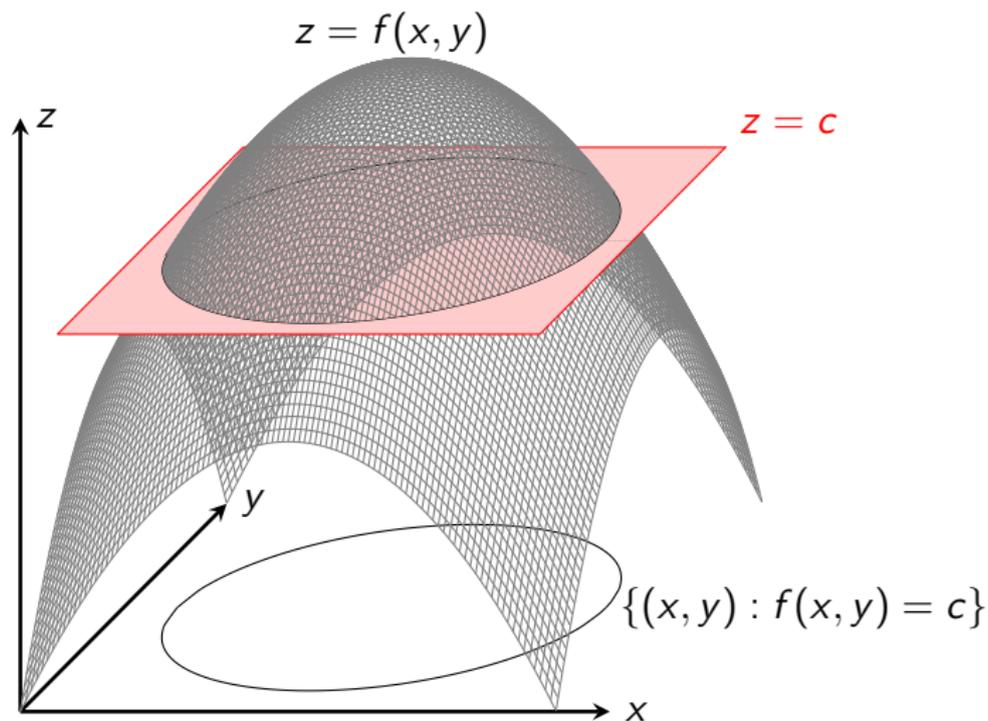
Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

14.3 Geometrische Darstellung

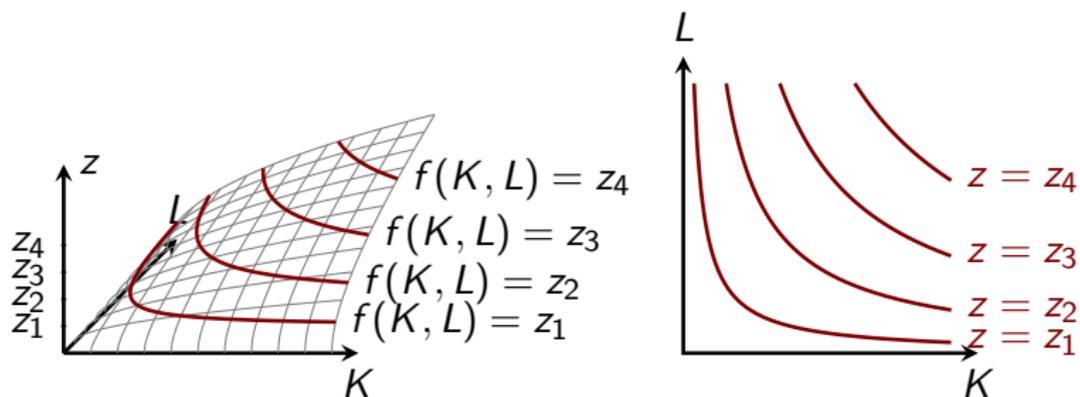
Der **Graph** der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:



Höhenlinien



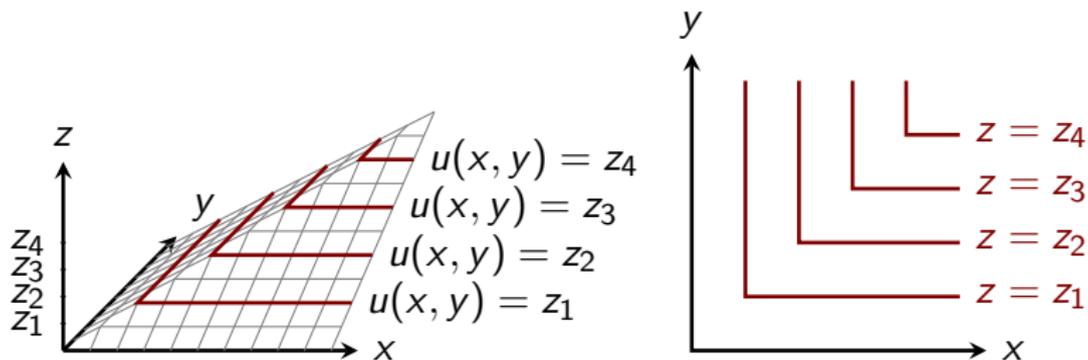
Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion



Eine **Isoquante** („gleich Menge“) gibt an, mit welchen Inputkombinationen (K, L) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

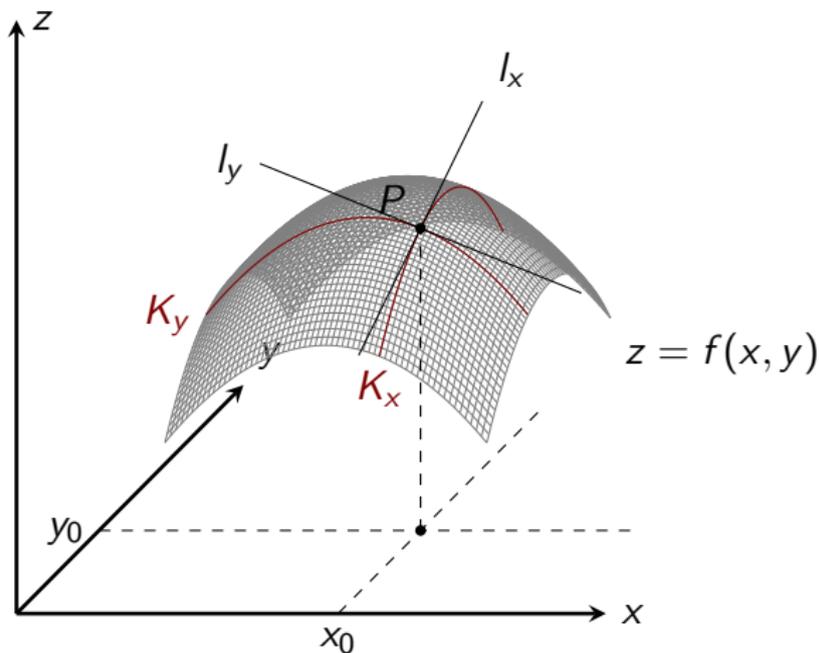
Indifferenzkurven für perfekte Komplemente



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen

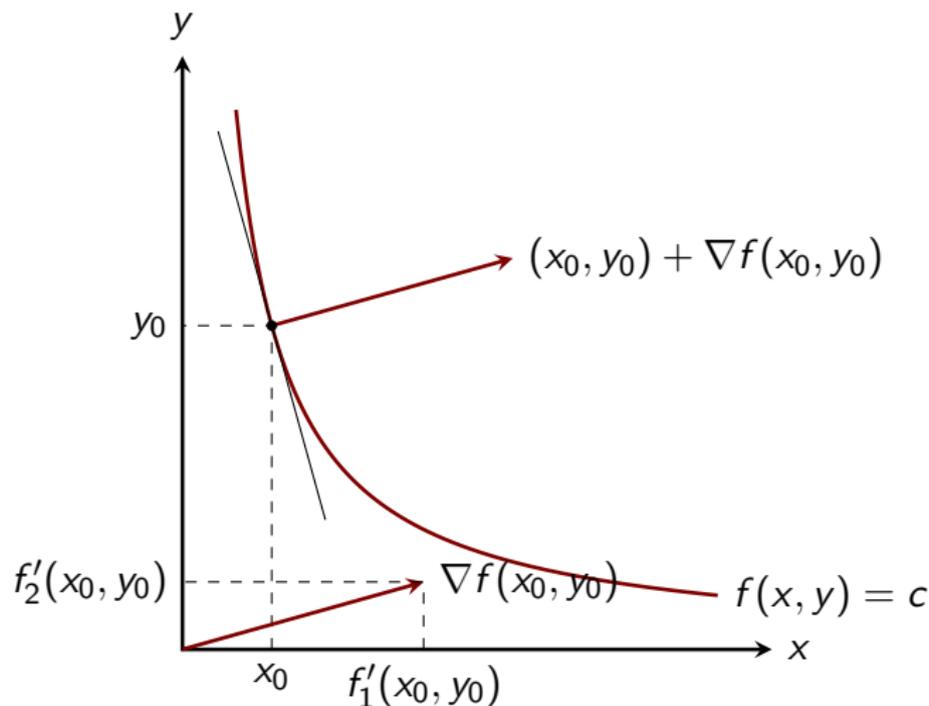


Steigung von l_y : $f'_1(x_0, y_0)$

Steigung von l_x : $f'_2(x_0, y_0)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (f'_1(x, y), f'_2(x, y))$$



Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

f''_{ii} : „direkte partielle Ableitung“

f''_{ij} (mit $i \neq j$): „gekreuzte partielle Ableitung“

Wenn f''_{ij} stetig ist für alle $i, j = 1, 2$, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D .$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z) , welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy -Ebene.

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

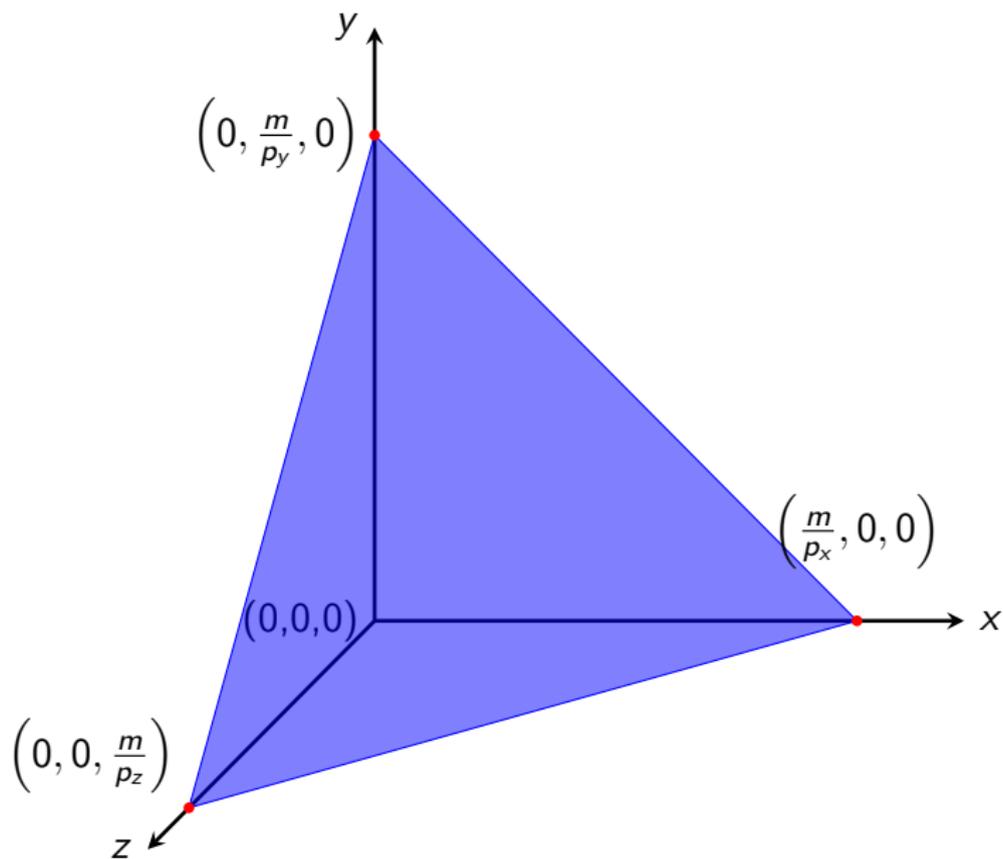
$$p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der **Budget-Ebene**.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die **Budget-Menge**:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq}^3 : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\}$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \dots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin“):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

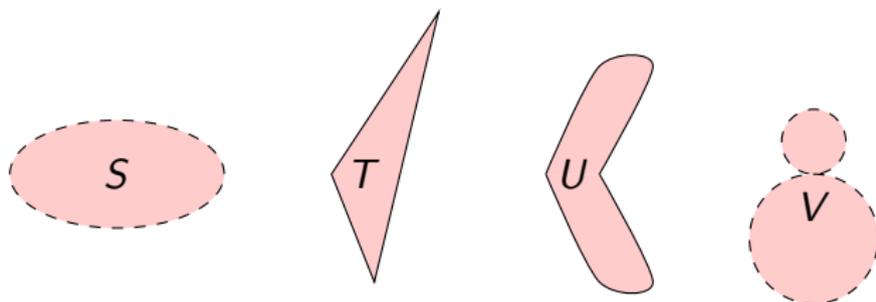
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \min \{a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n\}$$

14.7 Konvexe Mengen

Eine Menge heißt **konvex**, wenn jedes Paar von Punkten in dieser Menge durch eine Strecke verbunden werden kann, die ganz in der Menge liegt.

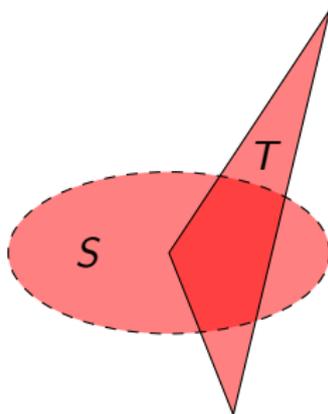
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in A \text{ für alle } \lambda \in (0, 1)$$



Durchschnitt und Vereinigung konvexer Mengen

Wenn S und T konvexe Mengen sind, dann ist ihr Durchschnitt $S \cap T$ auch konvex.



Die Vereinigung konvexer Mengen ist nicht notwendig konvex.

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei $z = f(\mathbf{x})$ eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge S .

f ist **konkav**, wenn für alle \mathbf{a} und \mathbf{b} in S und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{b})$$

f ist **konvex**, wenn für alle \mathbf{a} und \mathbf{b} in S und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{b})$$

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex & offen und symmetrischer Hessematrix H . Dann gilt:

- ▶ H ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow f$ ist konkav
- ▶ H ist negativ definit $\Rightarrow f$ ist strikt konkav
- ▶ H ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow f$ ist konvex
- ▶ H ist positiv definit $\Rightarrow f$ ist strikt konvex

Die Definitheit von H soll jeweils überall in S gelten.

Zusammenfassung

- ▶ Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- ▶ Geometrische Darstellung:
Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- ▶ Flächen: Ebenen
- ▶ Euklidischer n -dimensionaler Raum
- ▶ Partielle erste und zweite Ableitungen:
Gradient und Hesse-Matrix
- ▶ Konvexe Mengen
- ▶ Konkave und konvexe Funktionen