Vorlesung zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

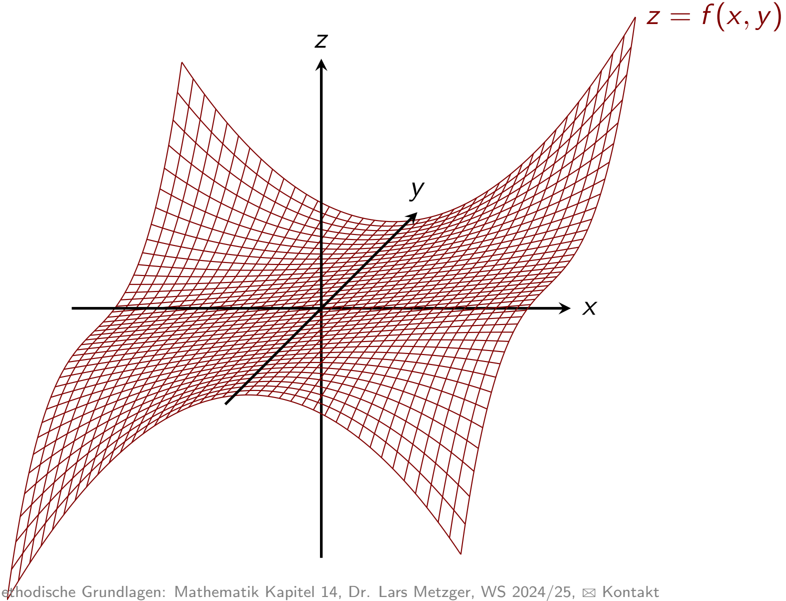
Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Beispiel: $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Falls $z = f(x, y)$, dann ist

- $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x, wenn y konstant gehalten wird.
- $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y, wenn x konstant gehalten wird.

"Ableitung nach der 1. Variable"

Definition:

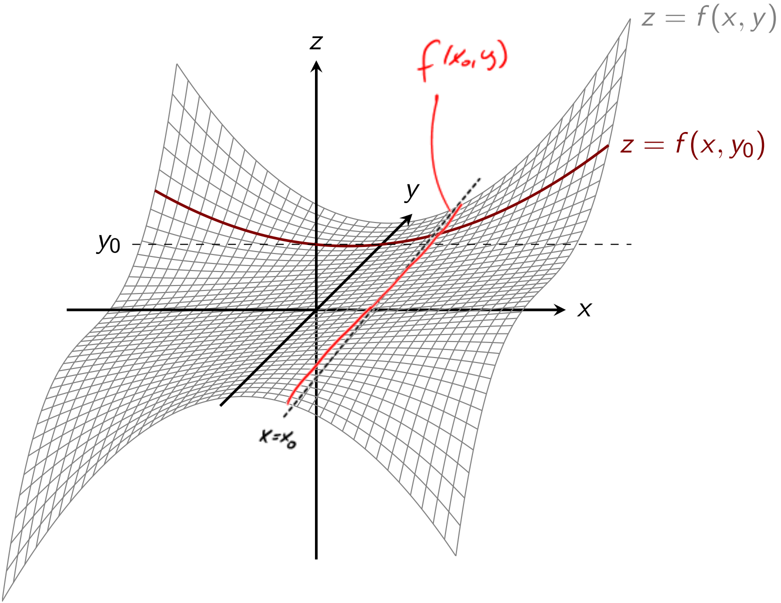
alternativ f'_x

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_1(x, y) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_2(x, y) := \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

f'_y

2. Variable

Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2 y^3$

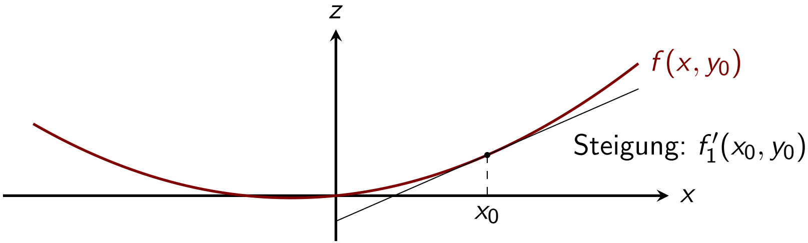


Partielle Ableitung nach x

y_0 : konstante

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



$$\boxed{f_1'(x, y_0) = 2 + 2x y_0^3}$$

$$f(x,y) = 2x + x^2 \cdot y^3$$

$$\boxed{f_2'(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2}$$

z.B.: $x=5$

$$f(5,y) = 2\cdot 5 + 5^2 y^3$$

$$= \underline{\underline{10}} + 25 \cdot y^3$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

$$f(x,y) = 2x + x^2 y^3$$

$$f'_1(x,y) = 2 + 2x y^3$$

$$f'_2(x,y) = 3x^2 y^2$$

$$f''_{11}(x,y) = 2 \cdot y^3$$

$$f''_{12} = 2x\,3y^2 = 6xy^2$$

$$f''_{21}(x,y) = 3 \cdot 2x \cdot y^2 = 6xy^2$$

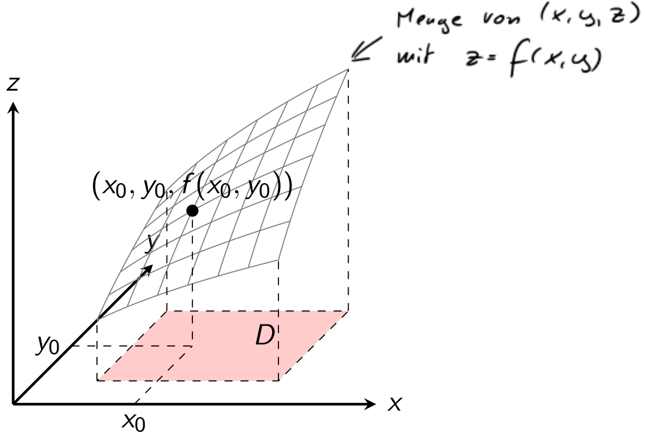
$$f''_{22} = 3x^2\,2 \cdot y = 6x^2 \cdot y$$

Hesse Matrix

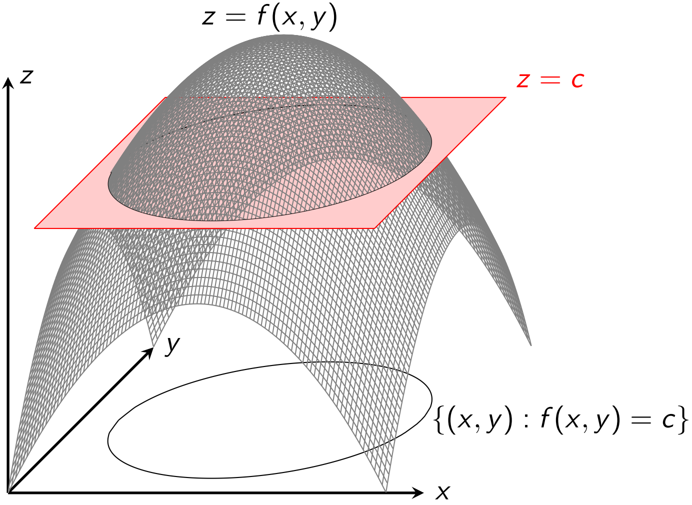
$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

14.3 Geometrische Darstellung

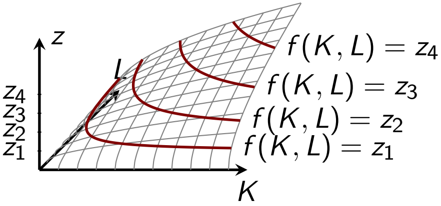
Der **Graph der Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

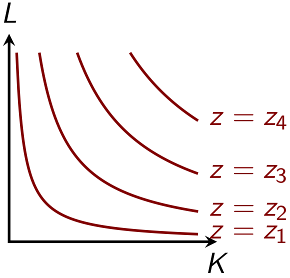


Höhenlinien



Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

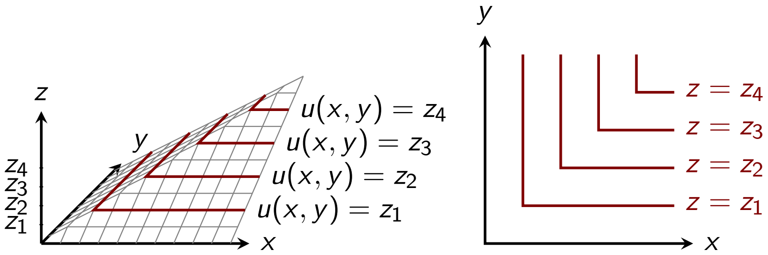




Eine **Isoquante** („gleich Menge“) gibt an, mit welchen Inputkominationen (K, L) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

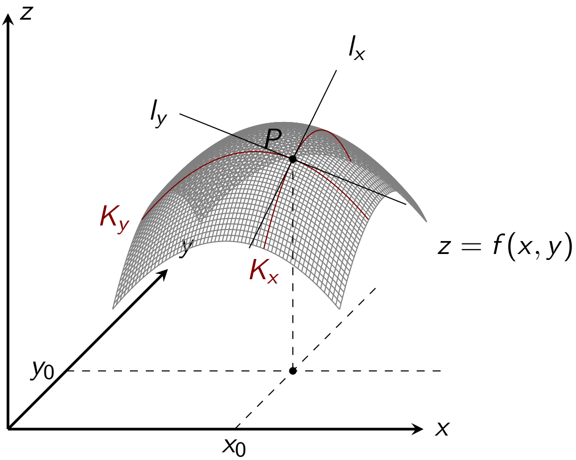
Indifferenzkurven für perfekte Komplemente



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen



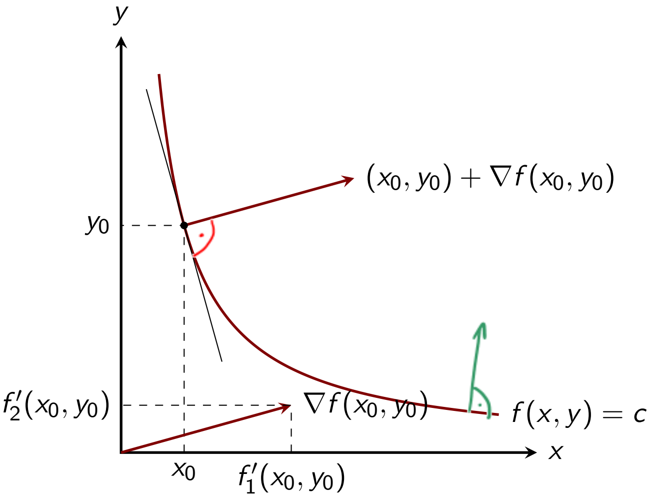
Steigung von l_y: $f_1'(x_0, y_0)$ Steigung von l_x: $f_2'(x_0, y_0)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

alternativ

D_f

"nabla" $\nabla f(x, y) = (f_1'(x, y), f_2'(x, y))$



Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

f''_{ii}: „direkte partielle Ableitung“

f''_{ij} (mit $i \neq j$): „gekreuzte partielle Ableitung“

Wenn f''_{ij} stetig ist für alle $i, j = 1, 2$, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D \ .$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

Falls $c \neq 0$: $z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c} \cdot x - \frac{b}{c} \cdot y$

$cz = d - ax - by$

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z), welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy-Ebene.

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

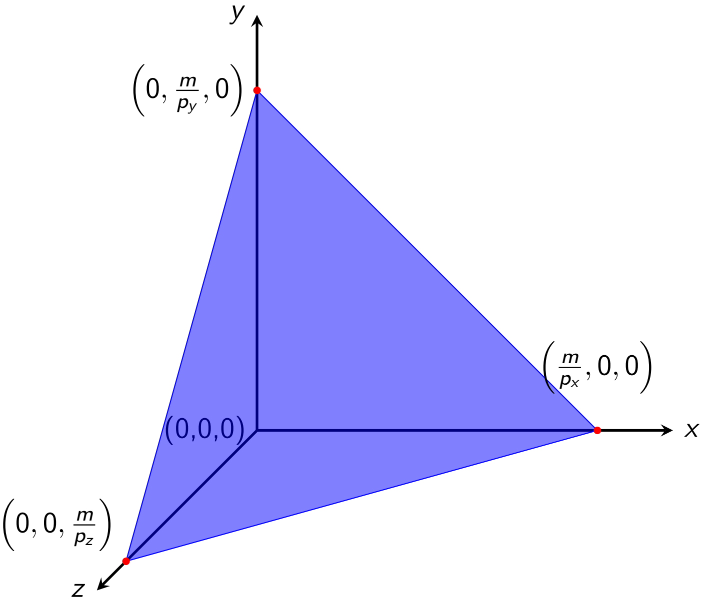
$$\overbrace{p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z}^{\text{Ausgaben}} = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der **Budget-Ebene**.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die **Budget-Menge**:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_{\geq} : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\right\}$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin"):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

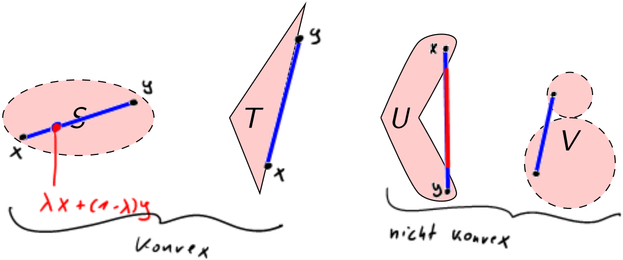
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n\}$$

14.7 Konvexe Mengen

Eine Menge heißt **konvex**, wenn jedes Paar von Punkten in dieser Menge durch eine Strecke verbunden werden kann, die ganz in der Menge liegt.

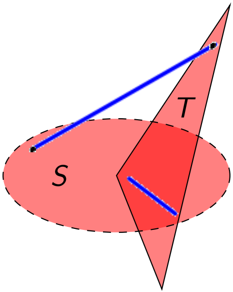
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A \text{ für alle } \lambda \in (0,1)$$



Durchschnitt und Vereinigung konvexer Mengen

Wenn S und T konvexe Mengen sind, dann ist ihr Durchschnitt $S \cap T$ auch konvex.



Die Vereinigung konvexer Mengen ist nicht notwendig konvex.

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sei $z = f(\mathbf{x})$ eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge S.

$(a_1, \ldots, a_n)$ $(b_1, \ldots, b_n)$

f ist **konkav**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in S und für alle λ in $[0,1]$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

f ist **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in S und für alle λ in $[0,1]$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ mit $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex & offen und symmetrischer Hessematrix H. Dann gilt:

- H ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ f ist konkav
- H ist negativ definit $\Rightarrow$ f ist strikt konkav
- H ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ f ist konvex
- H ist positiv definit $\Rightarrow$ f ist strikt konvex

Die Definitheit von H soll jeweils überall in S gelten.

Anwendung Cobb-Douglas-Funktion

w.w.:
$c, d > 0$
$c + d \le 1$

$$f(x,y) = x^c \cdot y^d$$

$$f_1'(x,y) = c \cdot \underbrace{x^{c-1}}_{x^c \cdot x^{-1}} \cdot y^d$$

$$= \underbrace{x^{-1}}_{\frac{1}{x}} \cdot c \cdot \underbrace{x^c \cdot y^d}_{f(x,y)}$$

$$= \frac{c}{x} \cdot f(x,y)$$

analog

$$f_2'(x,y) = \dots = \frac{d}{y} \cdot f(x,y)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{c}{x} \cdot f(x,y) , \frac{d}{y} \cdot f(x,y) \right) = \left(\frac{c}{x} , \frac{d}{y} \right) \cdot f(x,y)$$

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

$$f_1'(x,y) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-1} \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3x} \cdot f(x,y)$$

analog

$$f_2'(x,y) = \frac{2}{3 \cdot y} \cdot f(x,y)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{3x} , \frac{2}{3y} \right) \cdot f(x,y)$$

Hesse-Matrix der Cobb-Douglas-Funktion

$$\nabla f(x,y) = \left(c\, x^{c-1} y^{d} \,,\; d\, x^{c} y^{d-1} \right)$$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} c \cdot \underbrace{(c-1)}_{<0} \underbrace{x^{c-2}}_{x^c x^{-2}} y^{d} & c\, \underbrace{x^{c-1}}_{x^c x^{-1}} d\, \underbrace{y^{d-1}}_{y^d y^{-1}} \\ d \cdot c \cdot \underbrace{x^{c-1}}_{x^c x^{-1}} \underbrace{y^{d-1}}_{y^d y^{-1}} & d\, x^{c} \underbrace{(d-1)}_{<0} \underbrace{y^{d-2}}_{y^d \cdot y^{-2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c}{x} \cdot \frac{(c-1)}{x} & \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \\ \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} & \frac{d}{y} \cdot \frac{(d-1)}{y} \end{pmatrix} \underbrace{x^{c} \cdot y^{d}}_{f(x,y)}$$

$$|f''| = \left(f(x,y)\right)^2 \left(\underline{\frac{c\cdot(c-1)}{x^2} \cdot \frac{d\cdot(d-1)}{y^2}} - \underline{\frac{c\cdot d}{xy} \cdot \frac{c\cdot d}{xy}} \right)$$

$$= \left(f(x,y)\right)^2 \frac{1}{x^2} \frac{1}{y^2} c\cdot d \left((c-1)(d-1) - c\cdot d \right)$$

$$= \left(f(x,y)\right)^2 \frac{c\, d}{x^2 y^2} \left(\cancel{c\cdot d} - c - d + 1 - \cancel{c\cdot d} \right)$$

$$= \underbrace{\left(f(x,y)\right)^2 \frac{c\, d}{x^2\cdot y^2}}_{>0} \underbrace{\left(1 - c - d \right)}_{\geq 0} \geq 0$$

$f''_{11}, f''_{22} < 0 \Rightarrow f''$ negativ definit

$\Rightarrow f$ konkav.

Zusammenfassung

- Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- Geometrische Darstellung:
  Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- Flächen: Ebenen
- Euklidischer n-dimensionaler Raum
- Partielle erste und zweite Ableitungen:
  Gradient und Hesse-Matrix
- Konvexe Mengen
- Konkave und konvexe Funktionen