Vorlesung zu Kapitel 13:[1]

Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Determinanten der Ordnung 2

Der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **determiniert** also, ob

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix $\mathbf{A}$ und schreiben $det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

Beispiel 13.1.1

Die Matrix **A** laute

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\mathbf{A}|$!

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ und } x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

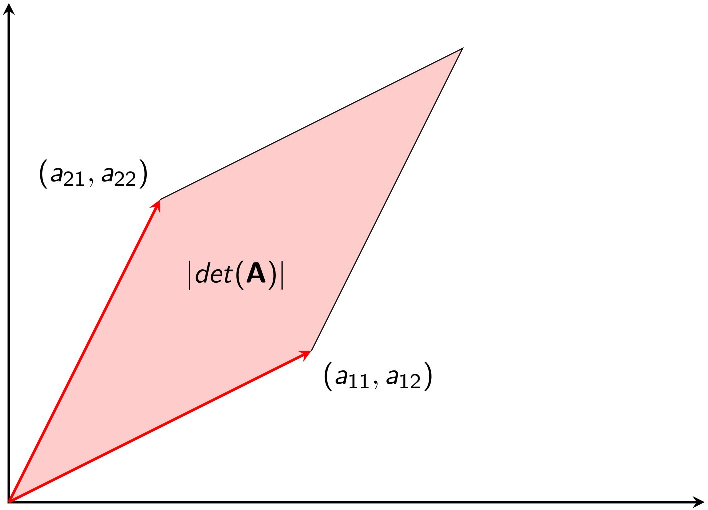
(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Beispiel

Berechne mit den Formeln von voriger Folie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation der Determinante



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei **A** eine Matrix der Ordnung 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von **A** ist definiert durch:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| \;=\; & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & \qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & \qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus

$$
\begin{array}{ccccccc}
+ & + & + & & - & - & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

Lösung eines 3×3-Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|A| \neq 0$).

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$. Dann gilt:

- $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$)
- Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
- Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (, wobei $\mathbf{B}$ $n \times n$)

13.6 Die Inverse einer Matrix

Für eine gegebene Matrix $\mathbf{A}$ ist die Matrix $\mathbf{X}$ eine **Inverse** von $\mathbf{A}$, wenn gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$$

Die Matrix A ist dann **invertierbar**.

Bemerkungen:

- $\mathbf{AX}$ und $\mathbf{XA}$ sind nur dann definiert, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{X}$ quadratisch und derselben Ordnung sind.

  Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

- $|\mathbf{I}| = 1 : \mathbf{I} = \mathbf{AX} \Rightarrow |\mathbf{AX}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0.$

  Wenn $\mathbf{A}$ *eine Inverse hat, so gilt* $|\mathbf{A}| \neq 0$.
  Wenn $|\mathbf{A}| = 0$, *dann hat* $\mathbf{A}$ *keine Inverse.*

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\,?$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist!

Eigenschaften der Inversen

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen. Dann gilt:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

c) $\mathbf{A}'$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}$$

Spezialfall:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

13.12 Quadratische Form

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Für $n = 2$:

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Definitheit von Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt

- **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **indefinit**, falls $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:
$\mathbf{A}$ ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel

Ist die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

definit?

Definitheit von 2×2-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \geq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \leq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$

Zusammenfassung

- Determinanten – der Ordnung 2 und 3
- Inverse Matrizen
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- Definitheit von Matrizen