Vorlesung zu Kapitel 13:[1]

Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Determinanten der Ordnung 2

Der Ausdruck $\underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$ **determiniert** also, ob

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix **A** und schreiben $det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

Beispiel 13.1.1

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot x = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix **A** laute

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\mathbf{A}|$!

$$|A| = +4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = \boxed{5}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & b_1 \\ 3 & b_2 \end{pmatrix}\right| = 4 \cdot b_2 - b_1 \cdot 3 = \boxed{4b_2 - 3b_1}$$

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 2 \end{pmatrix}\right| = b_1 \cdot 2 - 1 \cdot b_2 = \boxed{2b_1 - b_2}$$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ und } x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Beispiel

Berechne mit den Formeln von voriger Folie die Lösung des Gleichungssystems

Probe: $2 \cdot 1 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 + \frac{6}{3} = 2 + 2 = 4$ ✓

$$A: \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b \\ 1 \cdot x_1 + 3x_2 &= \end{aligned}$$

Nenner von x_1 & x_2

$\downarrow$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-6 \cdot 1) = 6 - (-6) = 12$$

Zähler für x_1

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - (-6 \cdot 0) = 12 \quad \leadsto \quad x_1 = \frac{12}{12} = 1$$

Zähler für x_2

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4 \quad \leadsto \quad x_2 = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A x = b$$

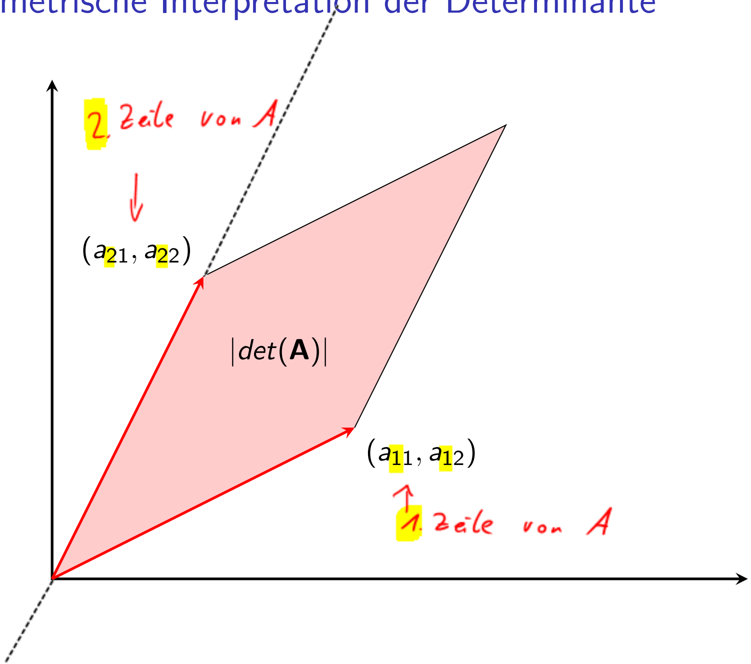
$$\Leftrightarrow A^{-1} A x = A^{-1} b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = A^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 0 \\ -1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{12}{12} \\ -\frac{4}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation der Determinante



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist definiert durch:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus

A

1. Spalte von A

2. Spalte von A

$$+ \qquad + \qquad + \qquad - \qquad - \qquad -$$

$$\begin{array}{ccc:cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| \quad &= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- \quad a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= \quad a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\qquad\qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\qquad\qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned}$$

Lösung eines 3×3-Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

(erw. Koeffizientenmatrix $A|b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \dots & & & \dots \end{array}\right)$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|A| \neq 0$).

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$. Dann gilt:

- $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$)
- Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
- Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (, wobei $\mathbf{B}$ $n \times n$)

13.6 Die Inverse einer Matrix

A^{-1}

Für eine gegebene Matrix **A** ist die Matrix **X** eine **Inverse** von **A**, wenn gilt:

Einheitsmatrix

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist dann **invertierbar**.

Bemerkungen:

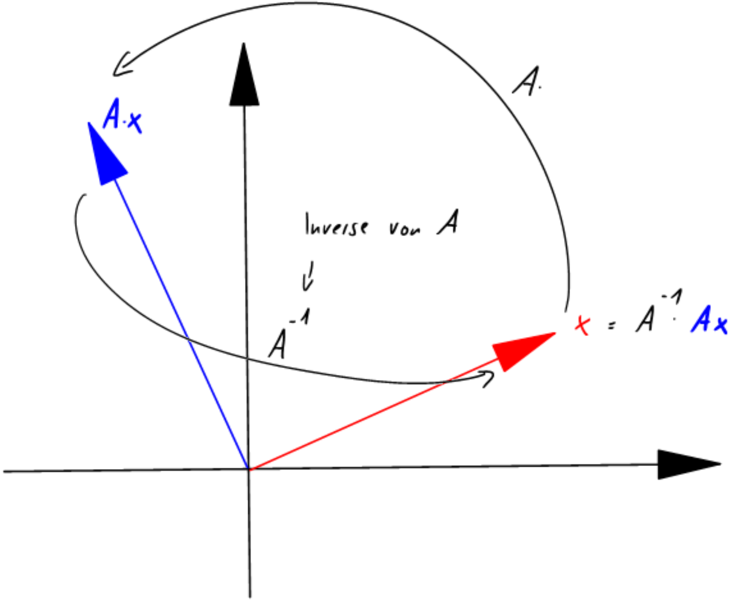
- **AX** und **XA** sind nur dann definiert, wenn **A** und **X** quadratisch und derselben Ordnung sind.

  Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

- $|\mathbf{I}| = 1 : \mathbf{I} = \mathbf{AX} \Rightarrow |\mathbf{AX}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{X}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0.$

  Wenn **A** *eine Inverse hat, so gilt* $|\mathbf{A}| \neq 0$.
  Wenn $|\mathbf{A}| = 0$, *dann hat* **A** *keine Inverse.*

  $|X| = \frac{1}{|A|}$



A·x
A·
Inverse von A
A^-1
x = A^-1 · Ax

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\pm$

Beispiel

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \; ?$$

$$|A| = 2 \cdot 3 - (-6 \cdot 1) = 6 - (-6) = 12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A^{-1} \cdot A = \underbrace{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \underbrace{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist!

Eigenschaften der Inversen

$(AB)' = B' \cdot A'$

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen. Dann gilt:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

c) $\mathbf{A}'$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}$$

Spezialfall:

Gleichungen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} x = A^{-1} \cdot b$$

$$\underbrace{I x}_{x} = A^{-1} \cdot b$$

13.12 Quadratische Form

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \overset{\text{Zeilenvektor}}{\mathbf{x}'}\mathbf{A}\underset{\text{Spaltenvektor}}{\mathbf{x}} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Für $n = 2$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Definitheit von Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt

- **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **indefinit**, falls $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:
$\mathbf{A}$ ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel

$|P| = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 4-4 = 0 \geq 0$

$4 \geq 0 \; , \; 1 \geq 0$

Ist die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

definit?

positiv semi definit

$$\underbrace{(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2\times 2 \quad 2\times 1} = \underset{1\times 2}{(x_1, x_2)} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 4\cdot x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}}$$

$$= x_1(4x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + x_2)$$

$$= 4\cdot x_1\cdot x_1 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + x_2\cdot x_2$$

$$= \underbrace{4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2} = Q(x)$$

$$= \underset{a^2}{(2x_1)^2} \underset{+2ab}{+ 2\cdot(2x_1)\cdot x_2} \underset{+b^2}{+ x_2^2} = (\overset{a}{2x_1} + \overset{b}{x_2})^2 \geq 0 \qquad = 0 \iff x_2 = -2x_1$$

Definitheit von 2×2-Matrizen

Anwendung in Kapitel 14:
Hessematrix ($a_{12} = a_{21}$)

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$ ($\Rightarrow a_{22} > 0$)
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \geq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$ ($\Rightarrow a_{22} < 0$)
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \leq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$

indefinit andernfalls

Zusammenfassung

- Determinanten – der Ordnung 2 und 3
- Inverse Matrizen
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- Definitheit von Matrizen