Vorlesung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

12.1 Matrizen und Vektoren

Zeilenindex

Spaltenindex

Tabelle von Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ hat die **Ordnung** $m \times n$.

Die Einträge a_{ij} der Matrix heißen **Elemente**.

Falls die Matrix nur 1 Zeile hat ($m = 1$): **Zeilenvektor**

Falls die Matrix nur 1 Spalte hat ($n = 1$): **Spaltenvektor**

Falls #Spalten = #Zeilen ($m = n$): **quadratische Matrix**

Beispiel: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 1 \cdot x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite (Ordnung 2×1):

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×4):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

12.2 Systeme linearer Gleichungen

m Gleichungen in n Unbekannten ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Bezeichnungen:

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: **unbekannte Variablen**

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: **Koeffizienten** des Systems

$b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$: **rechte Seiten**

a_{ij} ist der Koeffizient der j-ten Variablen (x_j) der i-ten Gleichung.

12.3 Matrizenaddition

Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ zwei Matrizen derselben Ordnung sind, definieren wir die **Summe** von **A** und **B** als die $m \times n$ Matrix $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Damit ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn α eine relle Zahl ist, definieren wir $\alpha\mathbf{A}$ durch

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m \times n} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 \\ 7 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & -1+11 & 7+3 \\ 3+7 & 5+5 & -3+13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 14 \\ 6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Regeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ beliebige $m \times n$ Matrizen und α und β seien relle Zahlen.

Außerdem bezeichne $\mathbf{0}$ die $m \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, die sogenannte **Nullmatrix**.

Dann gilt:

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

(e) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

(f) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

12.4 Vektorenalgebra

$(1 \times n)$-Zeilenvektor:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$(m \times 1)$-Spaltenvektor:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die Elemente eines Vektors heißen **Komponenten** und sind reelle Zahlen.

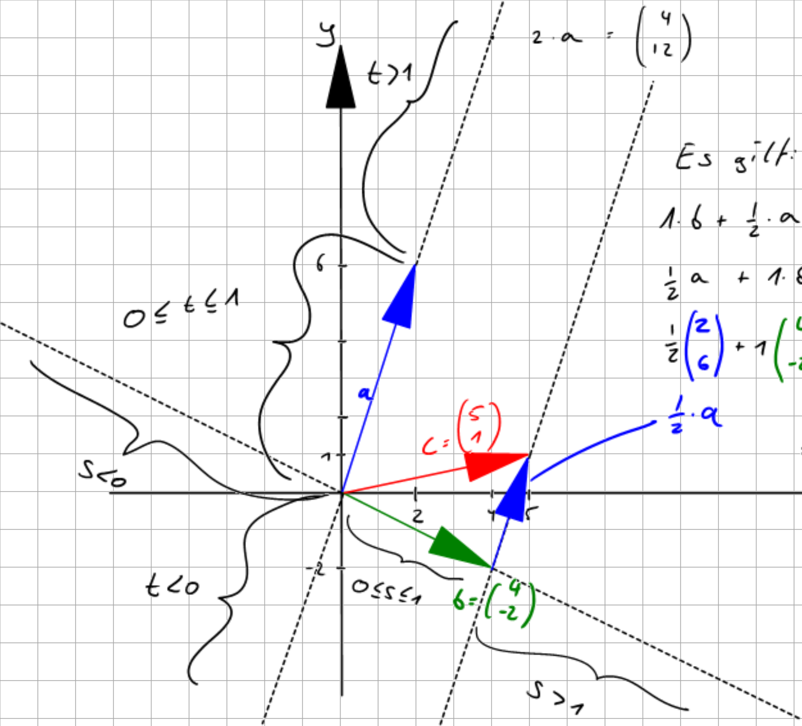
Die Anzahl der Komponenten eines Vektors heißt **Dimension**.

Ein n-Vektor ist ein Punkt in $\mathbb{R}^n$.

Operationen auf Vektoren und Linearkombinationen

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei n-Vektoren und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann heißt der n-Vektor $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ **Linearkombination** von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$



Es gilt:

$$1 \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a = c$$

$$\frac{1}{2} a + 1 \cdot b = c$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 6 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

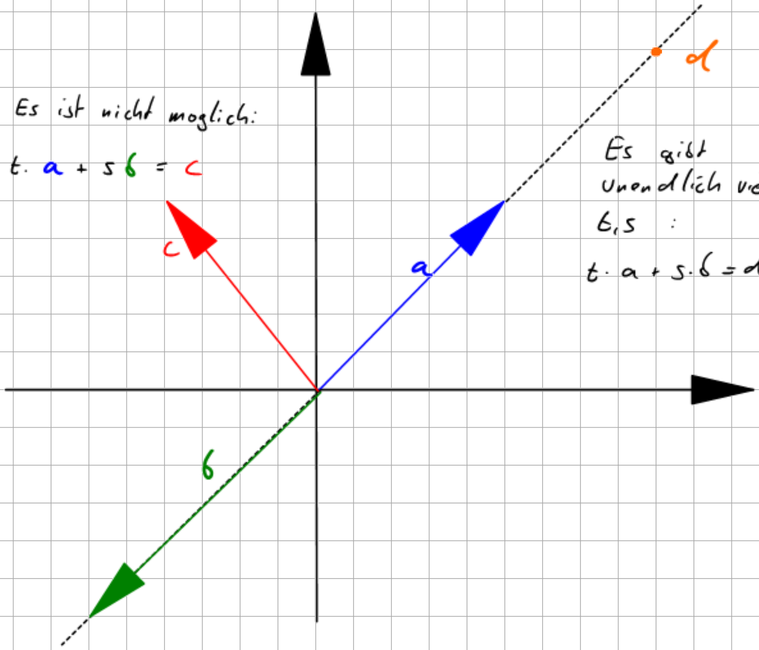
$$= \begin{pmatrix} 1 + 4 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist nicht moglich:

$t \cdot a + s b = c$

Es gibt unendlich viele t, s :

$t \cdot a + s \cdot b = d$



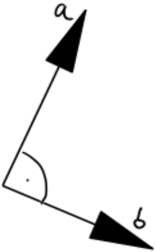
Das innere Produkt oder Skalarprodukt

Das innere Produkt der n-Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Bemerkungen:

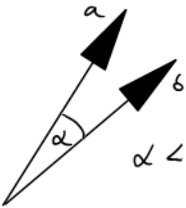
- Das innere Produkt ist eine Zahl (ein „Skalar").
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist nur dann definiert, wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die gleiche Dimension haben.



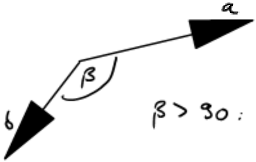
senkrecht / orthogonal

: $a \cdot b = 0$

"$a \perp b$"



$\alpha < 90$: $a \cdot b > 0$



$\beta > 90$: $a \cdot b < 0$

ökon. Beispiel

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ (altes) Güterbündel

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$ Preisvektor

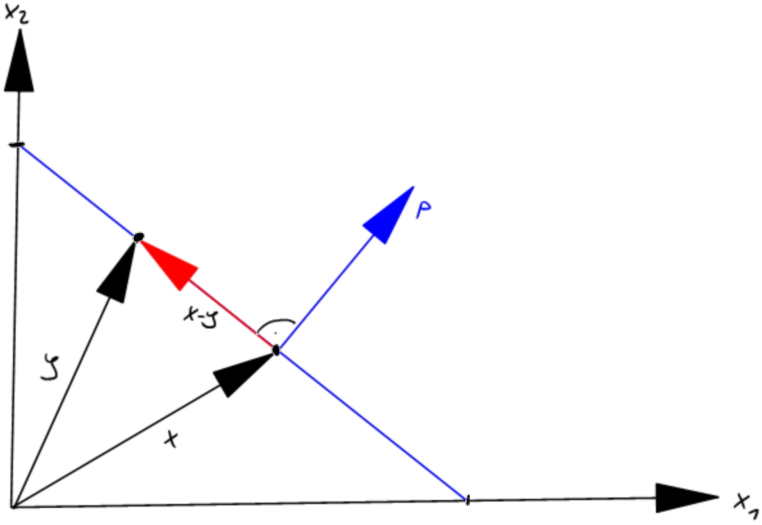
$X \cdot p$: Wert von X.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ neues Güterbündel

Tausch am Markt:

Einkünfte Ausgaben

$$X \cdot p - y p = (X - y) \cdot p$$



x_2
p
$x-y$
y
x
x_1

Regeln für das innere Produkt

Falls **a**, **b** und **c** jeweils n-Vektoren sind und α ein Skalar ist, dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(c) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$ $= \alpha \cdot (a \cdot b)$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$a \cdot a = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \dots + a_n \cdot a_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i^2}_{\geq 0}$$

Länge von a: $\sqrt{a \cdot a}$

12.5 Matrizenmultiplikation

$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$

Nehme an, dass $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times \underline{n}}$ und dass $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\underline{n} \times p}$.

Dann ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ die $m \times p$ Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ ist.

Matrizenmultiplikation

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

A: 2×3 $\qquad$ B: 3×2

$$\underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A} = \underset{3\times 3}{D}$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 6 & 0\cdot 1 + 7\cdot 5 + 2\cdot(-3) \\ -1\cdot 2 + (-5)\cdot 4 + 8\cdot 6 & -1\cdot 1 + (-5)\cdot 5 + 8\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40 & 29 \\ 26 & -50 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme in Matrizenform: Beispiel

Linearkombination $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$6x_1 - 2x_2 = 1$$

Definiere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

Definiere für das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

A,**x** und **b** mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Wenn **A**, **B** und **C** Matrizen sind, deren Ordnungen so sind, dass die gegebenen Operationen definiert sind, und wenn α ein beliebiger Skalar ist, dann gilt:

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \underline{\mathbf{A}}\mathbf{C}$ nach links!
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{C}} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{C}}$ nach rechts!
- $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$

Aber: $A \cdot B + C \cdot A \neq A(B+C)$

Vorsicht:

Es gilt im Allgemeinen **nicht**: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$!

Potenzen von Matrizen

Wenn **A** eine quadratische Matrix ist, können wir schreiben:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^2, \ \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3, \ \ldots$$

$m \doteq n$

bzw.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$$

Begründung:

$A^{n+1} = A^n \cdot A$

Beispiel:

Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsmatrix der Ordnung n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Für eine beliebige $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ gilt $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Ebenso gilt für $\mathbf{B}_{n \times m}$: $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

Unterschiede: Produkte von Zahlen und Matrixprodukte

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ Matrizen und α, β und γ Zahlen.

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

  Aber: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

  „oder"

- $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ impliziert nicht, dass $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ und $\alpha \neq 0$ impliziert $\beta = \gamma$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ implizieren nicht, dass $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

12.7 Die Transponierte

Für eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet die $n \times m$-Matrix $\mathbf{A}'$, deren i-te Spalte die i-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist, für $i = 1, \ldots, m$, die **Transponierte** von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{11} a_{12}

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{7} & 2 \\ \boxed{5} & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

2×3

a_{21}

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3×2

Regeln für das Transponieren

Gegeben seien Matrizen **A** und **B**, passend für die folgenden Operationen, und gegeben sei ein beliebiger Skalar α. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}')' &= \mathbf{A} \\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})' &= \mathbf{A}'+\mathbf{B}' \\
(\alpha\mathbf{A})' &= \alpha\mathbf{A}' \\
(\mathbf{AB})' &= \mathbf{B}'\mathbf{A}'
\end{aligned}$$

$$(ABC)' = C' \cdot B' \cdot A'$$

Symmetrische Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Anwendung Ökonometrie

Regressormatrix $\underset{n \times k+1}{X}$, Beobachtungsvektor y : n Komponenten

n: # Beobachtungen

k: # Regressoren "erklärenden Variablen"

Momentematrix $X'X$

Symmetrie?

$$(X'X)' = X'\underbrace{(X')'}_{X} = X'X$$

Zusammenfassung

- Systeme linearer Gleichungen
- Matrizen und Matrixoperationen
- Lineare Gleichungssysteme in Matrixnotation