Vorlesung zu Kapitel 10:[1]

Integration

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

$f(x) = e^x$ $\quad$ $f'(x) = e^x$

$g(x) = x^2$ $\quad$ $g'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

$h(x) = x^3$ $\quad$ $h'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f und F stetige Funktionen und sei F differenzierbar.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\int$: **Integralzeichen**
$f(x)$: **Integrand**
x: **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)
C: **Integrationskonstante**

$$\left(F(x) + c\right)' = F'(x) = f(x)$$

Einige wichtige Integrale

$\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C\right)' = \frac{1}{\cancel{r+1}}\cancel{(r+1)}\,x^{r}$

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

Beispiele:

$$\int x^1 dx \overset{r=1}{=} \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= x^{-3} \qquad \int \boxed{\frac{1}{x^3}} dx \overset{r=-3}{=} \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C$$

$$x^{\frac{1}{2}} \qquad \int \boxed{\sqrt{x}} dx \overset{r=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$r = -1$

$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$

da $\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$, da $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\int e^x\, dx = e^x + C$, da $\frac{d e^x}{dx} = e^x$

Das Integrationszeichen $\int$

Das Integrationszeichen $\int$ ist aus dem langen s „ſ" der Frakturschrift entstanden.

Der Buchstabe ſ steht für lat. summa und deutet darauf hin, dass ein Integral eigentlich eine Summe ist.

Grundlegende Integrationsregeln

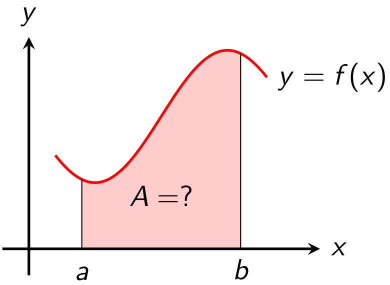
Wie bei Summen gilt:

$$\int af(x)\ dx = a \int f(x)\ dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

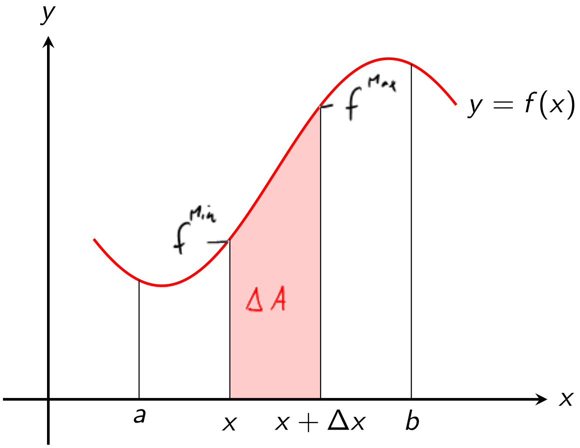
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Wie berechnen wir die Fläche A unter dem Graphen einer stetigen und nichtnegativen Funktion f über dem Intervall $[a, b]$?



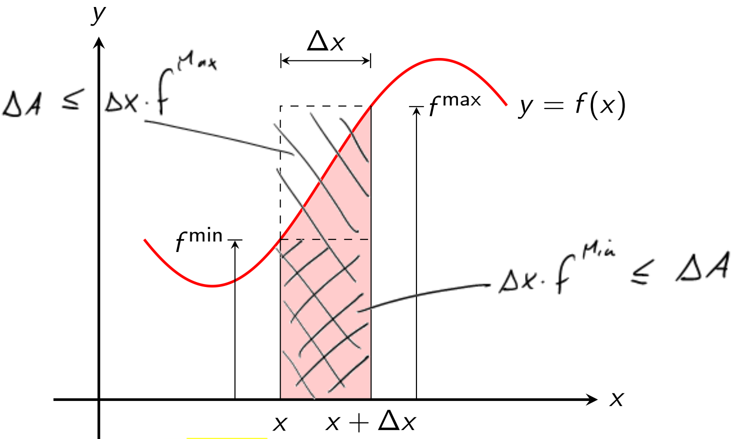
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Zunächst: die Fläche des Teilintervalls $[x, x + \Delta x]$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Die Fläche ΔA zwischen $[x, x + \Delta x]$ ist **mindestens** so groß wie $\Delta x \cdot f^{\text{min}}$ und **höchstens** so groß wie $\Delta x \cdot f^{\text{max}}$:

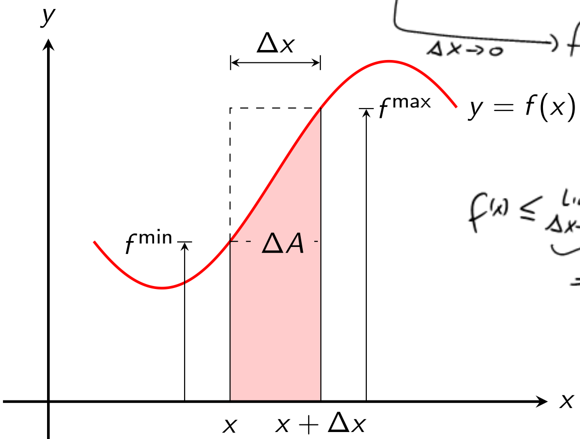


$$\Delta x \cdot f^{\text{Min}} \leq \Delta A \leq \Delta x\, f^{\text{Max}}$$

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

$$f^{\min} \cdot \Delta x \le \Delta A \le f^{\max} \cdot \Delta x \Leftrightarrow f^{\min} \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le f^{\max}$$

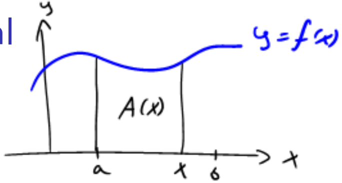
$$f^{\max} \xrightarrow{\Delta x \to 0} f(x) \qquad f^{\min} \xrightarrow{\Delta x \to 0} f(x)$$



$$f(x) \le \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x}}_{= f(x)} \le f(x)$$

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$$

Fläche A als ein unbestimmtes Integral



Sei $f : D \to \mathbb{R}_{\geq}$ stetig mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $[a, b] \subseteq D$.

Mit $A'(x) = f(x) \; \forall \; x \in [a, b]$ gilt also

$$\int f(x) \; dx = \int A'(x) \; dx = A(x) = F(x) + C \; \forall \; x \in [a, b]$$

Die Fläche A ist also ein unbestimmtes Integral der Funktion f.

$$A(a) = 0 = F(a) + C$$

$$A(x) = F(x) - F(a) \qquad \Leftrightarrow \quad C = -F(a)$$

Das bestimmte Integral

Seien $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und sei F differenzierbar auf (a, b) mit $F'(x) = f(x)$ für $x \in (a, b)$.

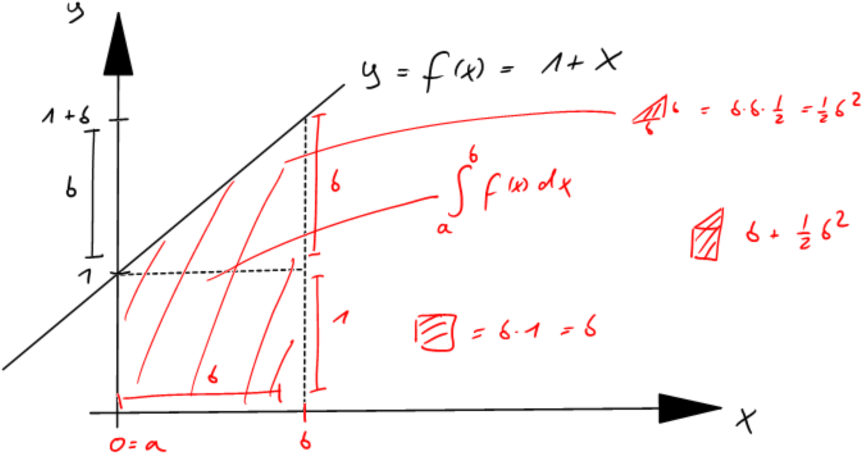
Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über $[a, b]$.

Das bestimmte Integral ist eine reelle Zahl, die wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx = \Big|_a^b F(x) \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

bezeichnen.

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.



x^0

$$\int_0^b 1 + x \, dx = \int_0^b 1 \, dx + \int_0^b x \, dx$$

$F(x) + C$

$$= \Big[\overbrace{X + C_1} + \overbrace{\tfrac{1}{2} x^2 + C_2} \Big]_0^b$$

$$= b + c_1 + \frac{1}{2}b^2 + c_2 - \left(0 + c_1 + \frac{1}{2}0^2 + c_2\right)$$

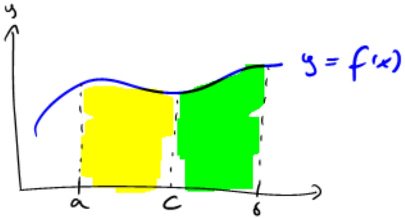
$$= \underline{\underline{b + \frac{1}{2}b^2}}$$

$$A(b) = b + \frac{1}{2}b^2$$

$$A'(b) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2b = 1 + b = f(b)$$

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$, dann gilt

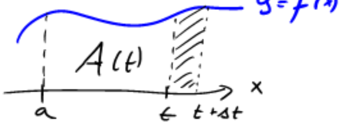


- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen

$$\left(\int_a^t f(x)\,dx\right)' = \left(F(t) - F(a)\right)' = F'(t) = f(t)$$

Seien $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und F differenzierbar auf (a,b) mit $F'(x) = f(x)$ für alle x in (a,b).



Sei $t \in (a,b)$.

Dann gilt:

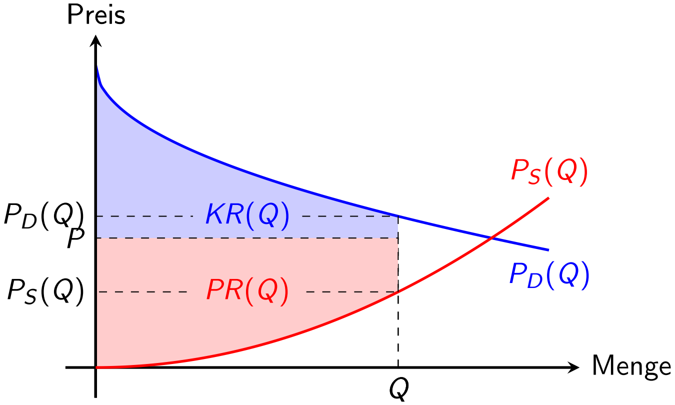
$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = F'(t) = f(t) \ .$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_t^b f(x)dx = -F'(t) = -f(t) \ .$$

$$\int_t^b f(x)\,dx = -\int_b^t f(x)\,dx$$

10.4 Ökonomische Anwendung: Wohlfahrt



Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(Q) = KR(Q) + PR(Q) = \int_0^Q \left(P_D(q) - P_S(q)\right) dq$$

Maximierungsproblem der Firma am Wettbewerbsmarkt.

$$PR = P\cdot Q - (C(Q) - C(0))$$

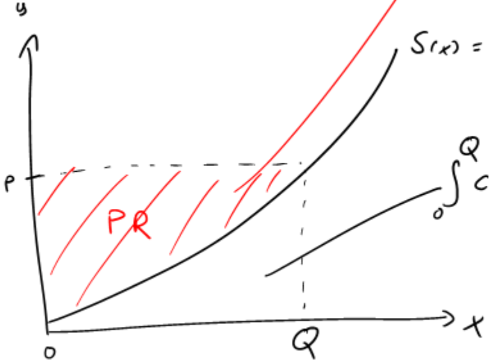
$$= \underbrace{P\cdot Q - C(Q)}_{\text{Gewinn}} + \underset{\text{Fixkosten}}{C(0)}$$

$$\max_{x \geq 0} \quad p\cdot x - c(x)$$

BEO $\quad p - c'(x) \overset{!}{=} 0 \iff p = c'(x)$

$$\underbrace{\text{Grenzkosten} = \text{inverse Angebotsfkt.}}_{S(x)}$$

$S(x) = c'(x)$



$$\int_0^Q c'(x)\,dx = \Big[c(x)\Big]_0^Q = c(Q) - \underset{\text{Fixkosten}}{\underset{\uparrow}{c(0)}}$$

10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

Beispiel 10.5.1 (partielle Integration)

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\int \underline{xe^x}\, dx$$

Hier hat der eine Faktor, x, eine einfache Ableitung (1) und der andere Faktor, e^x, eine einfache Stammfunktion (e^x).

Es gilt also:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x$$

Probe $(x \cdot e^x - e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x = \underline{\underline{x \cdot e^x}}$

Wahrscheinlichkeiten

Betrachte eine stetige Zufallsvariable, welche Werte im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ annehmen kann.

Sie wird durch die **Dichtefunktion** $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq}$ beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert im Intervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ annimmt, ist durch

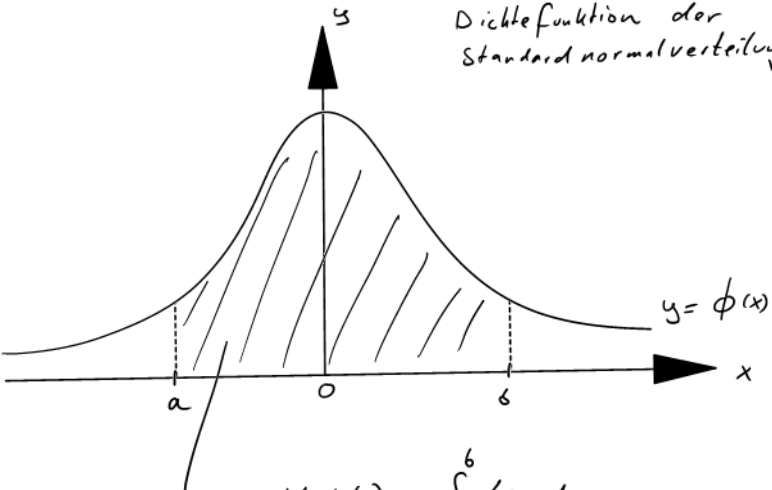
$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx$$

gegeben.

Es gilt $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$ und damit auch $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Die **Verteilungsfunktion** ist durch $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ gegeben.

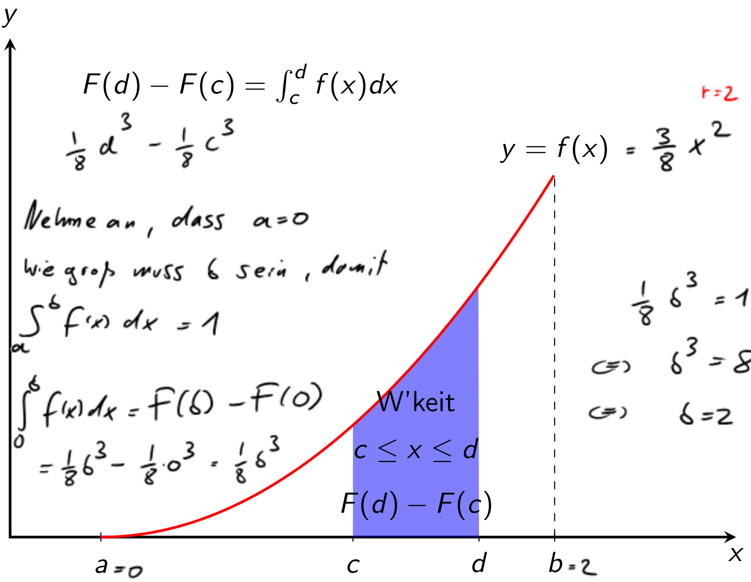
Dichtefunktion der Standardnormalverteilung



$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b \phi(x)\,dx$$

Beispiel Dichtefunktion

$F(x) = \frac{3}{8}\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{8}x^3$



Nehme an, dass $a=0$

Wie groß muss b sein, damit

$\int_a^b f(x)\,dx = 1$

$\int_0^b f(x)\,dx = F(b) - F(0)$

$= \frac{1}{8}b^3 - \frac{1}{8}\cdot 0^3 = \frac{1}{8}b^3$

$\frac{1}{8}b^3 = 1$

$\iff b^3 = 8 = 2^3$

$\iff b = 2$

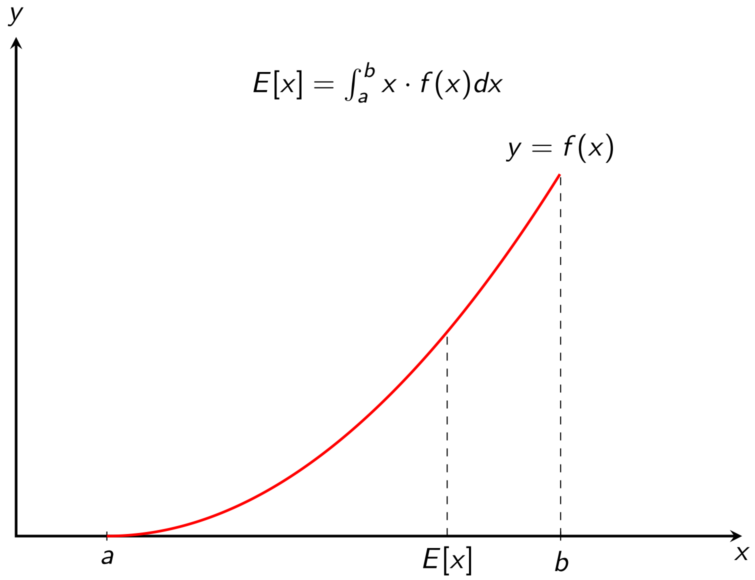
Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist der (theoretische) Durchschnittswert der Variablen bei unendlich vielen unabhängigen Ziehungen.

$$E[x] = \int x \cdot f(x) dx$$

Der Erwartungswert ist der „Gravitationspunkt“ der Dichtefunktion.

Erwartungswert



Zusammenfassung

- Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- Integrationsregeln
- Flächen und bestimmte Integrale
- Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- Ökonomische Anwendung: Wohlfahrt
- Partielle Integration
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte