Vorlesung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

9.1 Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

- $c \in D$ eine **Maximalstelle** für f und $f(c)$ ist der **Maximumwert**, wenn

$$f(x) \leq f(c) \; \forall \; x \in D$$

- $d \in D$ eine **Minimalstelle** für f und $f(c)$ ist der **Minimumwert**, wenn

$$f(x) \geq f(d) \; \forall \; x \in D$$

"für alle"

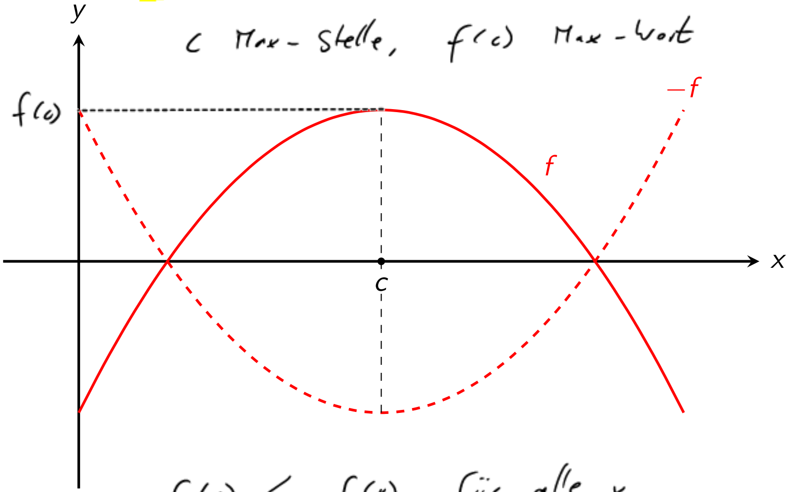
Sind die Ungleichungen strikt, so heißen c und d strikte Maximal- und Minimalstelle.

Die kollektive Bezeichnung lautet **Extremstelle**.

Maximum von f = Minimum von $-f$

$f(c) \geq f(x)$ für alle x

c Max-Stelle, $f(c)$ Max-Wert



$-f(c) \leq -f(x)$ für alle x

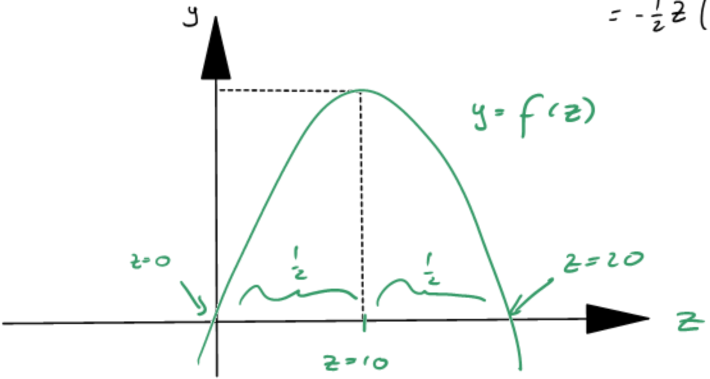
Beispiel $\quad f(x) = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$

gesucht: Maximumstelle x^*

Hilfsvariable $\quad z = \sqrt{x} \qquad x = z^2$

$$\leadsto \quad f(z) = 10 \cdot z - \frac{1}{2} z^2 = -\frac{1}{2} z(-20 + z)$$

$$= -\frac{1}{2} z \underbrace{(z - 20)}_{=0 \Leftrightarrow z = 20}$$



$z = 10$ maximiert $10 \cdot z - \frac{1}{2} z^2$

$$50 = 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10^2 \geq 10 \cdot z - \frac{1}{2} z^2 \text{ für alle } z$$

mit $z = \sqrt{x}$ bzw $x = z^2$ ergibt sich:

$$x^* = 10^2 = 100$$

Also muss gelten

$$10 \cdot \sqrt{x^*} - \frac{1}{2} \cdot x^* \geq 10 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} x \text{ für alle } x$$

$$50 = 10 \cdot \sqrt{100} - \frac{1}{2} \cdot 100 \geq 10 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} x$$

Bedingungen für innere Extrempunkte

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x_0) > 0$ für $x_0 \in (a, b)$.

Behauptung: x_0 kann **keine** Maximumstelle von f sein!

Begründung durch Widerspruch

Angenommen x_0 ist eine Max-Stelle.

$\Rightarrow \quad f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (a, b)$

$\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \leq 0$

Für $x > x_0$ gilt dann: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0) \leq 0} \leq 0$$

Widerspruch!

Falls x_0 Max-Stelle

$x < x_0$ $\qquad\qquad$ $x > x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad\qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Falls f differenzierbar:

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\leq 0} = \underbrace{f'(x_0)}_{=0}$$

Beispiel $f(x) = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$

Definitionsbereich: $[0, \infty)$

Falls es ein x^* gibt mit $f(x^*) \geq f(x)$ für alle x

und $x^* > 0$

Dann muss gelten $f'(x^*) = 0$

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \qquad | \cdot 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x} = 0 \cdot 2\sqrt{x}$$

$$10 - \sqrt{x} = 0 \qquad || + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 100$$

Berechne $f(0) = 10\sqrt{0} - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$

und $f(100) = 10\sqrt{100} - \frac{1}{2}\cdot 100 = 50 > 0$

$\Rightarrow$ $x^* = 100$ Max-Stelle

$f(x^*) = 50$ Max-Wert

Bedingungen für innere Extrempunkte

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x_0) > 0$ für $x_0 \in (a, b)$.

Behauptung: x_0 kann **keine** Maximumstelle von f sein!

Begründung:

Angenommen $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x > x_0$.

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ für alle } x > x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Dies steht im Widerspruch zu der Behauptung $f'(x_0) > 0$.

Notwendige Bedingung erster Ordnung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(a, b) \subseteq D$.

Falls $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$:

- x_0 kann keine Maximumstelle von f sein.
- x_0 kann keine Minimumstelle von f sein. (Begründung analog)

Damit $x_0 \in (a, b)$ eine Extremstelle für f in (a, b) ist, ist es eine **notwendige Bedingung**, dass die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich null ist:

$$f'(x_0) = 0 \; .$$

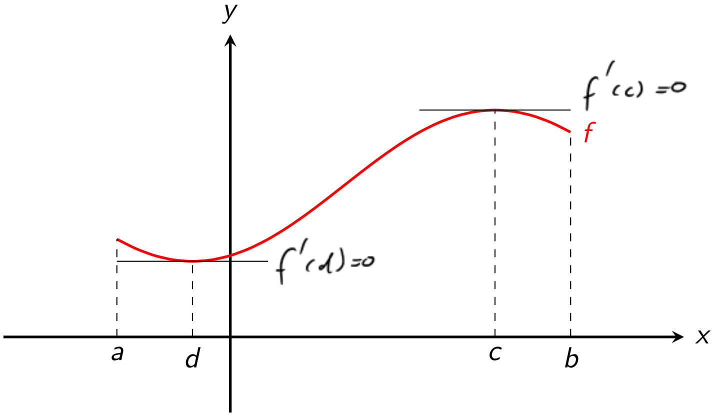
Wir nennen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch **stationäre** oder **kritische** Stellen.

$f'(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ keine Extremstelle

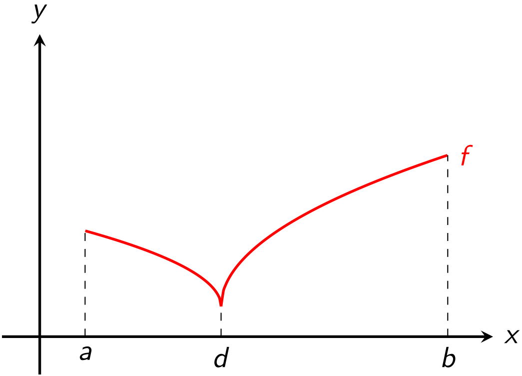
Kontraposition

$f'(x_0) = 0 \quad \Leftarrow \quad x_0$ ist Extremstelle

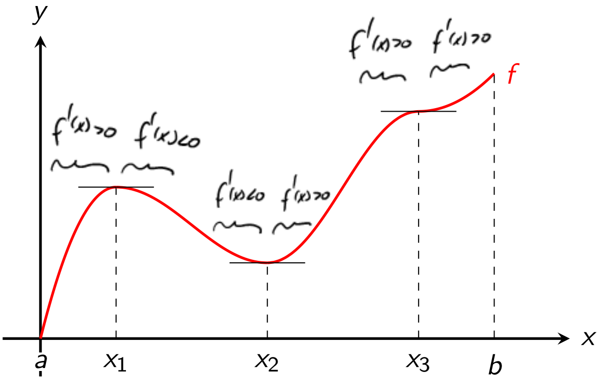
Zwei stationäre Stellen



Keine stationäre Stelle

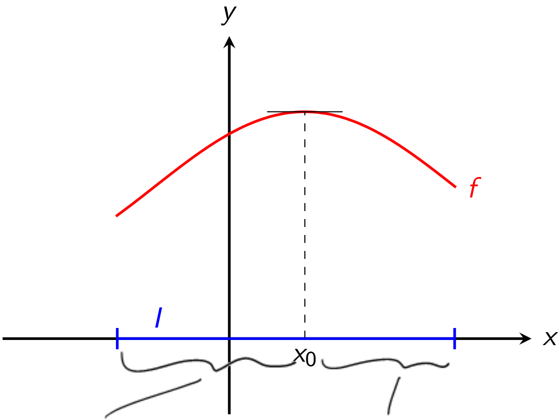


Keine inneren Extrema



Wenn x stationär ist, können wir nicht schlussfolgern, dass x eine Extremstelle von f ist!

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen



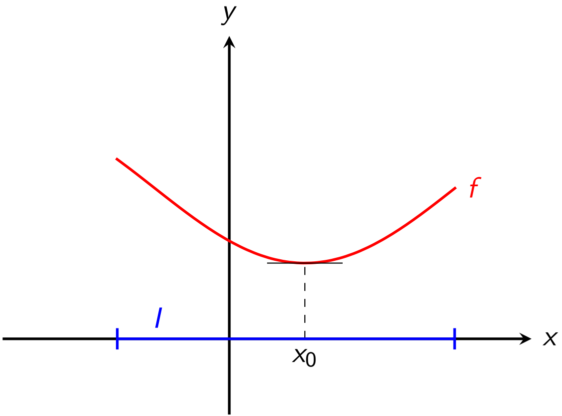
$f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \leq x_0$ $\qquad$ $f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \geq x_0$

$x - x_0 \leq 0$ $\qquad$ $x - x_0 \geq 0$

x_0 ist eine Maximumstelle.

$\underbrace{f'(x)}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_0)}_{\leq 0} \leq 0$ $\qquad$ $\underbrace{f'(x)}_{\leq 0}\underbrace{(x-x_0)}_{\geq 0} \leq 0$

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen



$f'(x) \leq 0 \; \forall \; x \leq x_0$ $\qquad$ $f'(x) \geq 0 \; \forall \; x \geq x_0$

Also: $f'(x)(x - x_0) \geq 0 \; \forall \; x$

x_0 ist eine Minimumstelle.

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen

Test der ersten Ableitung auf Extrema

Sei f differenzierbar auf einem Intervall I, welches x_0 enthält.

(i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ für alle x in I:
x_0 ist eine Maximumstelle für f auf I.

(ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ für alle x in I:
x_0 ist eine Minimumstelle für f auf I.

Falls die Ungleichung strikt ist für alle $x \neq x_0$, handelt es sich um eine strikte Extremstelle.

Extrema von konkaven und konvexen Funktionen

Sei x_0 im Inneren von D eine stationäre Stelle für f.

(i) Wenn f konkav ist, dann ist x_0 eine Maximumstelle für f.

(ii) Wenn f konvex ist, dann ist x_0 eine Minimumstelle für f.

Extrema von strikt konkaven und strikt konvexen Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einem Intervall I.

(i) Wenn f strikt konkav ist, dann ist eine Maximumstelle für f eindeutig.

(ii) Wenn f strikt konvex ist, dann ist eine Minimumstelle für f eindeutig.

Beispiel $\quad \Pi(x) = 10 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} x$

ist Π strikt konkav?

$$\Pi'(x) = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 5\, x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \qquad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Pi''(x) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+1}} = -\frac{5}{2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x} \cdot x}_{>0 \text{ falls } x>0}} < 0$$

$\Pi''(x) < 0$ für alle $x > 0$

$\Rightarrow$ Π ist strikt konkav für alle $x > 0$

$\Rightarrow$ x_0 stationär ist striktes eindeutiges Maximum.

9.3 Ökonomische Beispiele

Gewinnmaximierung im perfekten Wettbewerb

Beispiel:

Marktpreise:

- $w > 0$ für das Input
- $p > 0$ für das Output

$w = \frac{1}{2}$

$p = 10$

$f : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$ stetige Produktionsfunktion mit

$f(x) = \sqrt{x}$

- $x \geq 0$ Inputmenge, $f(x) \geq 0$ Outputmenge

Inada-Bedingungen

- $f(0) = 0$
- $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$, $f'(x) > \frac{w}{p}$ für x klein, $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.
- $f''(x) < 0$ für alle $x > 0$

$\pi : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ Gewinnfunktion:

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$$\pi(x) = 10 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot x$$

9.3 Ökonomische Beispiele

Gewinnmaximierung im perfekten Wettbewerb

Betrachte erste Ableitung von $\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$:

$$\pi'(x) = p \cdot f'(x) - w$$

Für x „klein“ gilt:

$$\pi'(x) = p \cdot f'(x) - w = p \cdot \underbrace{\left(f'(x) - \frac{w}{p}\right)}_{>0} > 0$$

Für x „groß“ gilt wegen $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$:

$$\pi'(x) = p \cdot f'(x) - w < 0$$

9.3 Ökonomische Beispiele

Gewinnmaximierung im perfekten Wettbewerb

Es gilt also $\pi'(a) > 0$ und $\pi'(b) < 0$, wobei a eine sehr kleine und b eine sehr große Zahl ist.

Da f zweifach differenzierbar ist, ist f' stetig und damit ist auch π' stetig.

Zwischenwertsatz:

Es gibt ein $x^* \in (a, b)$ mit $\pi'(x^*) = 0$.

$x^* > 0$ ist also eine stationäre Stelle für π.

Da f konkav ist, ist auch π konkav:

$$\pi''(x) = p \cdot f''(x) < 0$$

Daher muss x^* eine Maximalstelle von π sein.

Ökonomische Interpretation von $\pi'(x^*) = 0$

Mit $\pi(x) = \underbrace{p \cdot f(x)}_{\text{Erlös}} - \underbrace{w \cdot x}_{\text{Kosten}}$ gilt:

$$\pi'(x^*) = p \cdot f'(x^*) - w = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

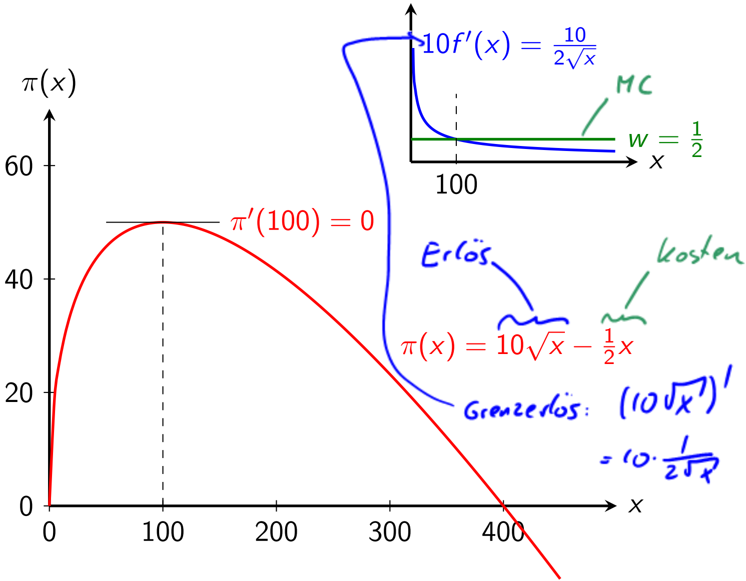
$$\underbrace{p \cdot f'(x^*)}_{\text{Grenzerlös}} \quad = \quad \underbrace{w}_{\text{Grenzkosten}}$$

Im Gewinnmaximum gilt also:

$$\text{Grenzerlös} = \text{Grenzkosten}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x},\ p = 10,\ w = \frac{1}{2}$

Kostenfunktion $C(x) = \frac{1}{2}x$
Grenzkosten $C'(x) = \frac{1}{2}$



9.3 Ökonomische Beispiele

Monopolist mit konstanten Grenzkosten

- Monopolfirma
- inverse Nachfragefunktion $P : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ mit $P', P'' < 0$
- $q \geq 0$: Menge des produzierten Outputs
- Kostenfunktion $c(q) = \bar{c} \cdot q$ Grenzkosten $c'(q) = \bar{c}$
- Gewinnfunktion $\pi(q) = \overbrace{P(q) \cdot q}^{\text{Erlös}} - \overbrace{\bar{c} \cdot q}^{\text{Kosten}}$

Annahme: $q^* > 0$ Maximalstelle von π

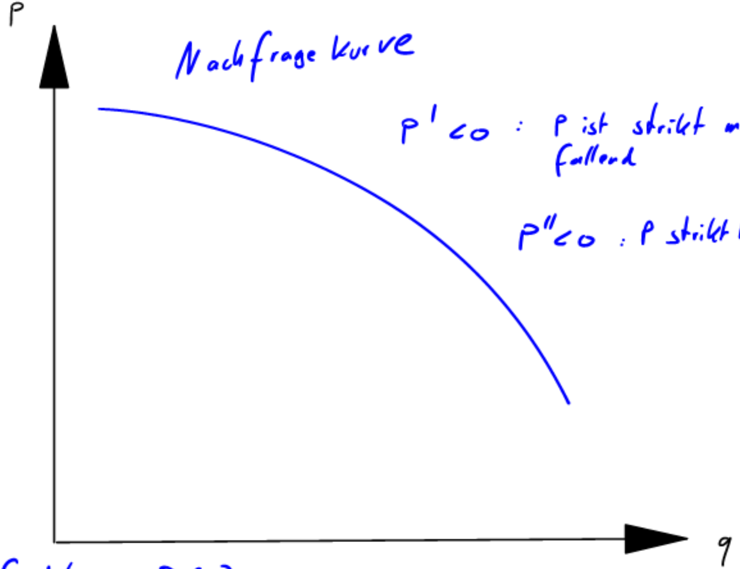
Implizite Definition von $q^*(\bar{c})$

Wie lautet die notwendige Bedingung erster Ordnung? $\pi'(q^*) = 0$

Wie reagiert die optimale Menge q^* auf eine Veränderung von $\bar{c}$? $\frac{d q^*(\bar{c})}{d \bar{c}}$?

Wie reagiert das Gewinnmaximum auf eine Veränderung von $\bar{c}$?

$\frac{d\, \pi(q^*(\bar{c}))}{d \bar{c}}$?



$p' < 0$: p ist strikt monoton fallend

$p'' < 0$: p strikt konkav

Nachfragefunktion $D(p) = q$

inverse Nachfragefunktion $P(q) = p$

9.4 Der Extremwertsatz

Es sei angenommen, dass f eine **stetige** Funktion auf einem **abgeschlossenen** und **beschränkten** Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist.

Dann existiert eine Stelle $d \in [a, b]$, an der f ein Minimum hat und eine Stelle $c \in [a, b]$, an der f ein Maximum hat, d.h. es gilt:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \; \forall \; x \in [a, b]$$

Sind stetig, abgeschlossen oder beschränkt nicht erfüllt, können Extremstellen existieren, müssen es aber nicht.

abgeschlossen

Die Menge A ist abgeschlossen, falls sie alle ihre Randpunkte enthält.

- $[0, 1]$: alle x mit $0 \leq x \leq 1$ abgeschl.
  Randpunkte: $0, 1$
- $[0, \infty)$: alle x mit $0 \leq x$ abgeschl.
  Randpunkt: 0
- $[0, 2)$: alle x mit $0 \leq x < 2$ nicht. abgeschl.
  Randpunkte: $0, 2$
- $(-\infty, \infty)$: alle $x \in \mathbb{R}$ abgeschlossen & offen
  keine Randpunkte

beschränkt

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt, falls

ein $k > 0$ existiert, sodass

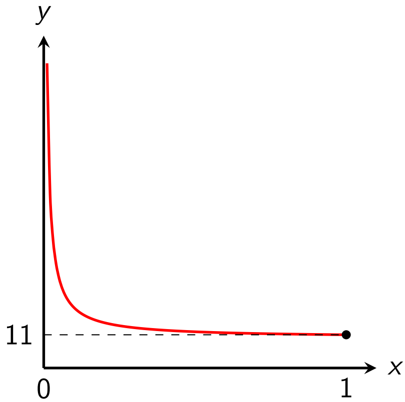
$k > x$ für alle $x \in A$

$-k < x$ für alle $x \in A$

Warum gibt es hier kein Maximum?

Definitionsbereich nicht abgeschlossen

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x} + 10$$



Warum gibt es hier kein Maximum?

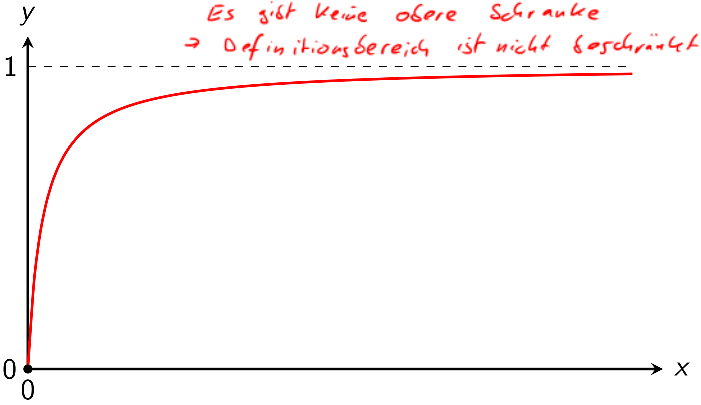
$\frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = x+1$ ↯

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

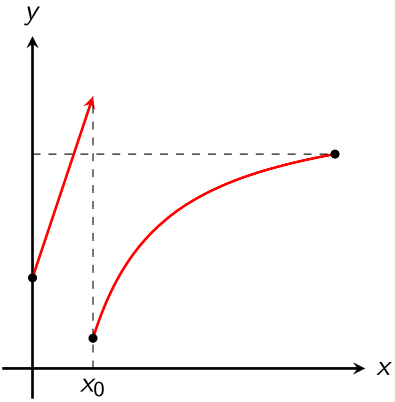
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{x+1}$$

↑ Es gibt keine obere Schranke

⇒ Definitionsbereich ist nicht beschränkt.



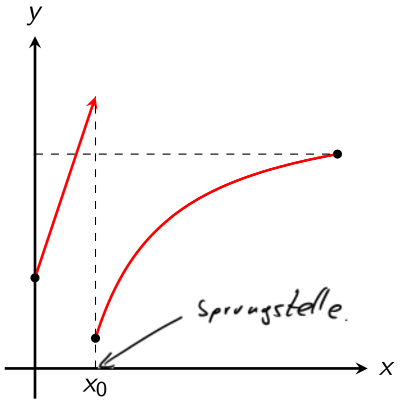
Warum gibt es hier kein Maximum?



Warum gibt es hier kein Maximum?

weil f nicht stetig ist

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



Wie nach Extremstellen gesucht wird

Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Jede Extremstelle des Intervalls I gehört zu einer der drei verschiedenen Mengen:

(a) Innere Punkte von I, in denen $f'(x) = 0$ ist;

(b) Endpunkte von I, falls sie zu I gehören; und

(c) Innere Punkte von I, in denen f' nicht existiert.

Punkte, die zu (a), (b) oder (c) gehören, heißen **Kandidaten für Extremstellen**.

Auffinden der Extrema von differenzierbaren Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Um die Extremwerte von f zu finden, gehe wie folgt vor:

1. Bestimme alle stationären Stellen von f in (a, b), d.h. bestimme alle $x \in (a, b)$, die die Gleichung $f'(x) = 0$ erfüllen.

2. Berechne den Funktionswert von f in den Endpunkten a und b des Intervalls und auch an allen stationären Stellen.

3. Der größte der in 1. und 2. gefundenen Funktionswerte ist der Maximalwert und der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in $[a, b]$.

$f : [\overset{a}{0}, \overset{b}{3}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Schritt 1:

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 6 = 6x - 6 \overset{!}{=} 0 \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x = 6 \quad | :6$$

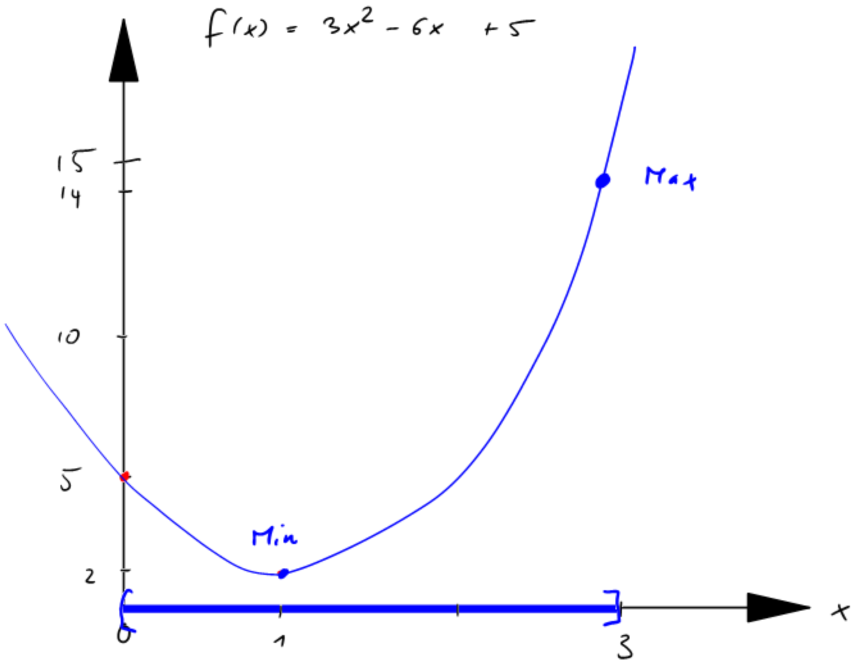
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

Schritt 2:

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 2 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$f(3) = \underbrace{3 \cdot 3^2}_{27} - \underbrace{6 \cdot 3}_{18} + 5 = 14 \rightarrow \text{Maximum}$$


$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
15
14
10
5
2
0
1
3
x
Max
Min

9.5 Weiteres ökonomisches Beispiel

Monopolfirma mit Kapazitätsgrenze

Eine Monopolfirma sehe sich der inversen Nachfragefunktion

$$P_D(q) = \max\{100 - q, 0\}$$

bei gegebener Outputmenge $q \geq 0$ gegenüber.

Sie habe die Kostenfunktion $c(q) = 20 \cdot q$.

Außerdem sei die Kapazitätsgrenze $0 < K < 100$ gegeben.

Der Gewinn der Firma beträgt

$$\pi(q) = \underbrace{(100 - q) \cdot q}_{\text{Erlös}} - \underbrace{20 \cdot q}_{\text{Kosten}} \text{ für } \overbrace{0 \leq q \leq K}^{\text{Definitionsbereich}}$$

abgeschl. ✓

beschränkt ✓

Stetig

$$\pi(q) = (100 - q) \cdot q - 20 \cdot q$$

$$= 100 \cdot q - q^2 - 20 \cdot q$$

$$= 80 \cdot q - q^2$$

$$\pi'(q) = 80 - 2q \overset{!}{=} 0 \quad | +2q$$

$$\Leftrightarrow 80 = 2q \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow 40 = q^*$$

$k > 40$	$k \leq 40$
$q^* = 40$ innere stationäre Stelle	keine innere stationäre Stelle

Schritt 2:

$$\pi(q) = (100-q)\cdot q - 20q$$
$$= 80q - q^2$$

$$\pi(0) = 0$$

$$\pi(k) = 80\cdot k - k^2$$

Falls $k > 40$:

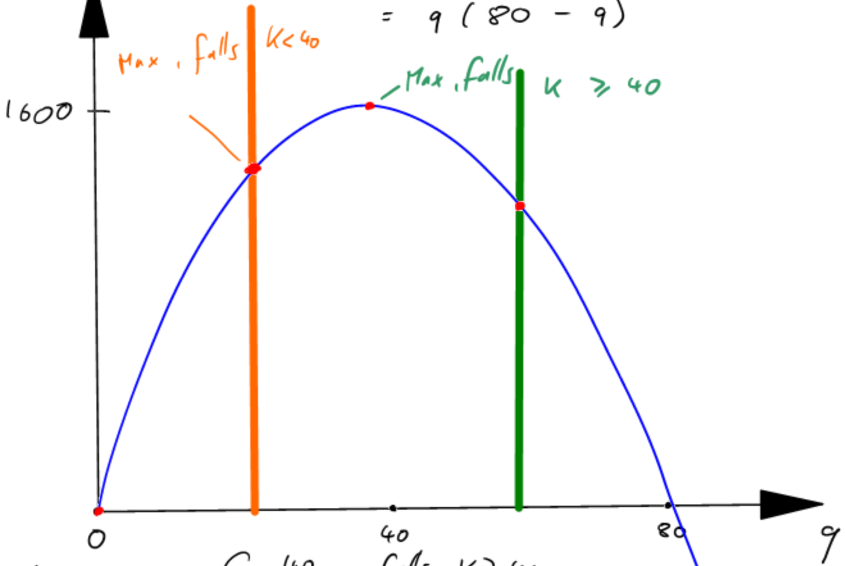
$$\pi(40) = 80\cdot 40 - 40^2 = 3200 - 1600 = 1600$$

Schritt 3: größter Wert → Maximum

$$80\cdot k - k^2 \leq 1600 = 40^2$$

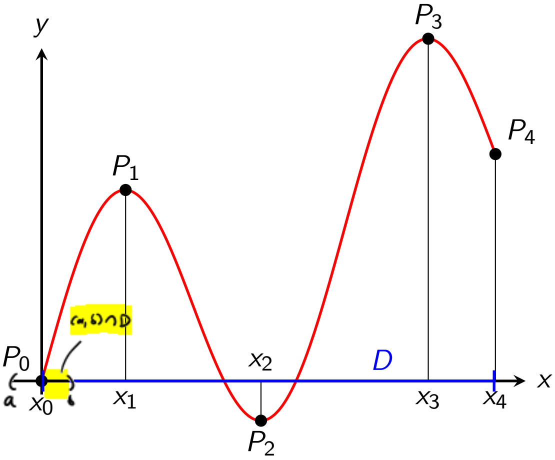
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1600 - 80k + k^2$$
$$= \underbrace{(40-k)^2}_{\geq 0}$$

$$\Pi(q) = 80q - q^2 = q(80-q)$$



$$\text{optimales } q^*(K) = \begin{cases} 40, & \text{falls } K \geq 40 \\ K, & \text{falls } K < 40 \end{cases}$$

9.6 Lokale Extremstellen



Lokale Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Funktion f hat ein **lokales Maximum** an der Stelle x_0, falls ein Intervall (a, b) um x_0 herum existiert, so dass

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } \overbrace{x \in (a, b)}^{\text{"in der Nähe von } x_0\text{"}} \cap D$$

Die Funktion f hat ein **lokales Minimum** an der Stelle x_0, falls ein Intervall (a, b) um x_0 herum existiert, so dass

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ für alle } x \in (a, b) \cap D$$

Kollektive Namen: **lokale Extremstellen** bzw. **lokale Extrema**

Lokale Extrema

Auch für lokale Extrema gilt:

In einer lokalen Extremstelle im Innern des Definitionsbereiches einer differenzierbaren Funktion muss die Ableitung Null sein.

Der Test der ersten Ableitung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Nehme an, dass x_0 ein innerer Punkt eines Intervalls $(a, b) \subset D$ ist und eine stationäre Stelle von f.

(i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ auf (a, b),
dann ist x_0 eine lokale Maximumstelle für f.

(ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ auf (a, b),
dann ist x_0 eine lokale Minimumstelle für f.

(iii) Falls $f'(x) > 0$ auf (a, b) (außer für $x = x_0$) oder
falls $f'(x) < 0$ auf (a, b) (außer für $x = x_0$),
dann ist x_0 keine lokale Extremstelle für f.

Der Test der zweiten Ableitung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Nehme an, dass x_0 ein innerer Punkt eines Intervalls I ist und eine stationäre Stelle von f.

(i) Wenn $f''(x_0) < 0$,
dann ist x_0 eine strikte lokale Maximumstelle.

(ii) Wenn $f''(x_0) > 0$,
dann ist x_0 eine strikte lokale Minimumstelle.

(iii) Wenn $f''(x_0) = 0$,
dann bleibt der Charakter von x_0 unbestimmt.

Der Umkehrschluss dieser Aussagen liefert die notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung.

Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung

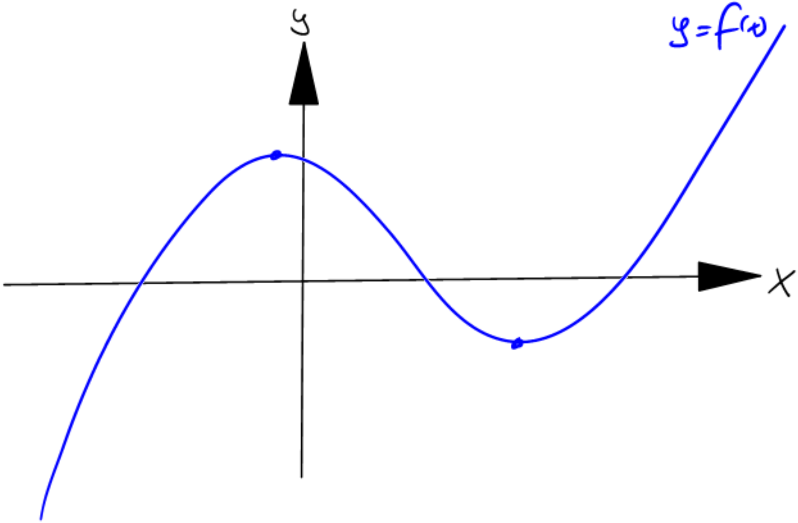
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$x_0 \text{ ist eine lokale Maximumstelle für } f \;\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$$

$$x_0 \text{ ist eine lokale Minimumstelle für } f \;\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$



Schritt 1: 1. Ableitung $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$$f'(x) = \frac{1}{9}3x^2 - \frac{1}{6}2x - \frac{2}{3} \overset{!}{=} 0$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \qquad | \cdot 3$$

$$f''(-1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 < 0$$

$\Rightarrow x_1 = -1$ Max

$$\Leftrightarrow x^2 \underbrace{-1}_{p}x \underbrace{-2}_{q} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \rightsquigarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

$$f''(2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 > 0$$

$\Rightarrow x_2 = 2$ Min

$$x^2 + px + q = 0 \Longrightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ falls } \frac{p^2}{4} \geq q$$

Zusammenfassung

- Extremstellen: Maximal- & Minimalstellen
- Notwendige Bedingung erster Ordnung für innere Extremstellen
- Zwischenwertsatz
- Extremwertsatz
- Lokale Extremstellen
- Notwendige Bedingung zweiter Ordnung