

Konkave und konvexe Funktionen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

8.1 Intuition

8.2 Definitionen

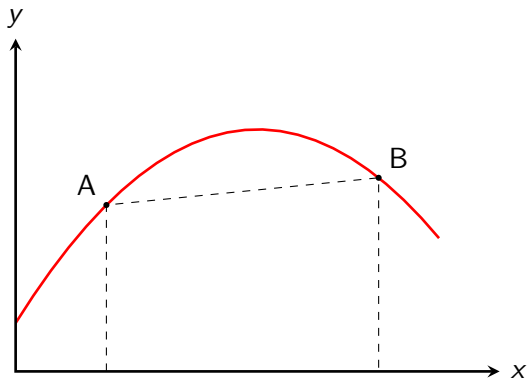
8.3 Allgemeine Eigenschaften

8.4 Tests der ersten Ableitung

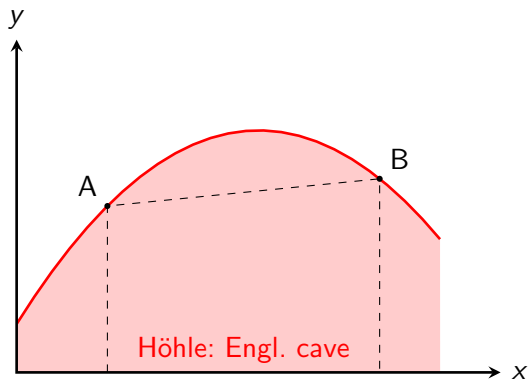
8.5 Tests der zweiten Ableitung

8.6 Wendestellen

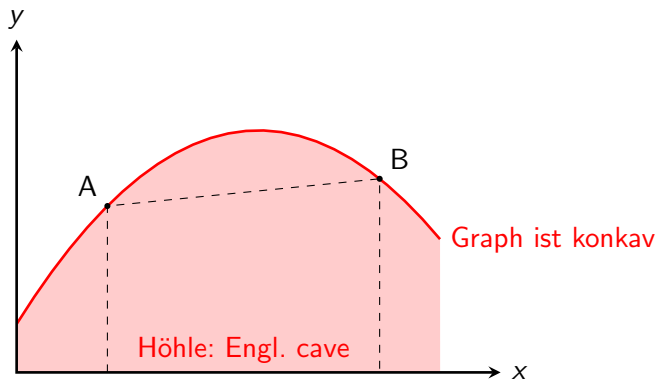
8.1 Intuition: Wäscheleine



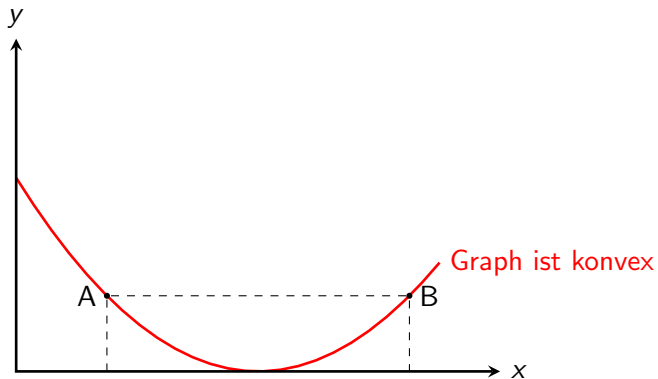
8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang



8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang



8.1 Intuition: Seil über Bach



8.2 Definition Konvexkombination

Für zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$x(\lambda) = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$$

eine **Konvexkombination** von x_1 und x_2 .

Es gilt zum Beispiel:

$$x(0) = x_2, \quad x(0,5) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x(1) = x_1$$

Für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(x(\lambda), y(\lambda)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2)$$

eine Konvexkombinationen dieser beiden Punkte.

8.2 Definition konkave Funktion

Eine Funktion f , definiert auf einem Intervall I , heißt **konkav** auf I , falls

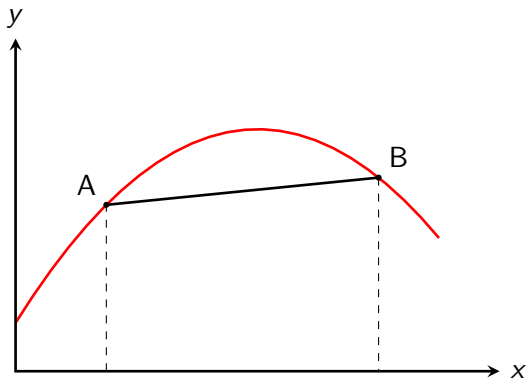
$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \geq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

für alle a und b in I und alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung strikt ist, wenn $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$, dann ist f **strikt konkav**.

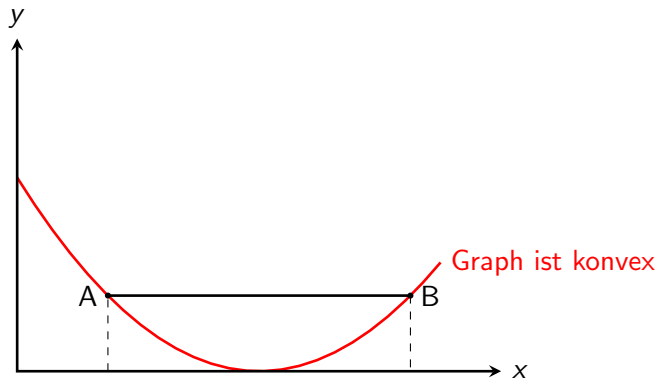
Der Funktionswert einer Konkavkombination von a und b muss mindestens so groß sein wie die Konkavkombination der Funktionswerte an den Stellen a und b – für jede beliebige Konkavkombination.

Graphische Veranschaulichung Konkavität



Der Graph aller Konvexkombinationen der Punkte A und B liegt **unterhalb** des Graphens der Funktion zwischen A und B .

Graphische Veranschaulichung Konvexität



Der Graph aller Konvexkombinationen der Punkte A und B liegt **überhalb** des Graphens der Funktion zwischen A und B .

8.2 Definition konvexe Funktion

Eine Funktion f , definiert auf einem Intervall I , heißt **konvex** auf I , falls

$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

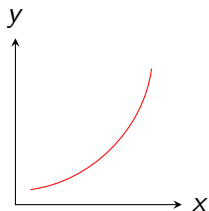
für alle a und b in I und alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung strikt ist, wenn $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$, dann ist f **strikt konvex**.

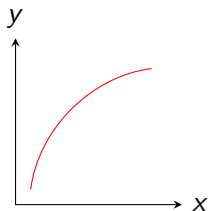
Der Funktionswert einer Konvexkombination von a und b darf höchstens so groß sein wie die Konvexkombination der Funktionswerte an den Stellen a und b – für jede beliebige Konvexkombination.

Anmerkung: Falls f konvex ist, so ist $-f$ konkav.

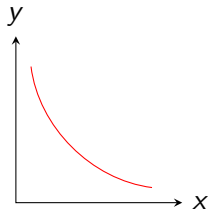
Monotonie und Krümmung



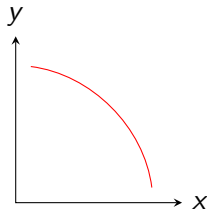
wachsend, konvex



wachsend, konkav



fallend, konvex



fallend, konkav

Steigungs-Charakterisierung

Sei die Funktion f definiert auf einem Intervall I und seien a und x in I mit $x > a$. Die Steigung der Sekante von $(a, f(a))$ nach $(x, f(x))$ sei definiert durch

$$s(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Eine Funktion f , definiert auf einem Intervall I , ist:

- ▶ (strikt) konkav, genau dann, wenn für jedes feste a in I die Steigung $s(a, x)$ (strikt) monoton fallend ist in x ;
- ▶ (strikt) konvex, genau dann, wenn für jedes feste a in I die Steigung $s(a, x)$ (strikt) monoton wachsend ist in x .

8.3 Allgemeine Eigenschaften

Wir präsentieren in diesem Abschnitt allgemeine Eigenschaften konkaver Funktionen. Mit der Regel

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow -f \text{ konvex}$$

Lassen sich diese Eigenschaften leicht für konvexe Funktionen anwenden.

Summen

Sind die Funktionen f und g konkav auf einem Intervall I , so ist $f + g$ ebenfalls konkav auf I .

Ist hierbei f oder g strikt konkav, so ist $f + g$ strikt konkav.

Beispiel:

Ist $f(x) = x^2 - 2x + 2$ konkav, konvex, oder weder noch?

Minima und Maxima

Sind die Funktionen f und g konkav auf einem Intervall I , so ist $\min\{f, g\}$ ebenfalls konkav auf I .

Beispiele:

Sei $f(x) = a + bx$ und sei $g(x) = \alpha + \beta x$. Ist $\max\{f, g\}$ konkav, konvex oder weder noch?

Ist $f(x) = |x|$ konkav, konvex, oder weder noch?

Verkettung von Funktionen

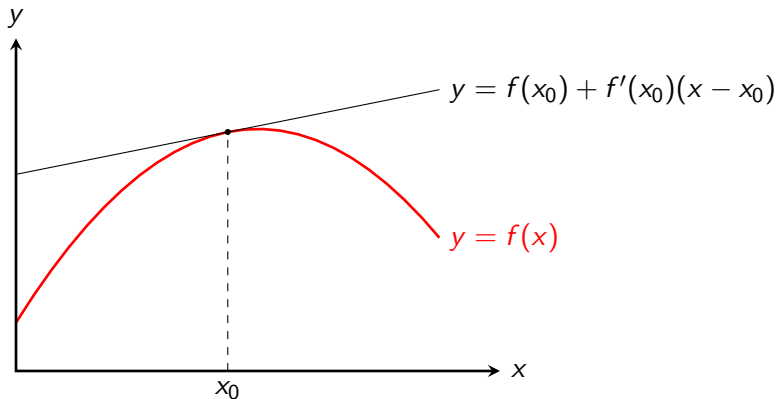
Sei $f : D \rightarrow R$ konkav auf Intervall $I \subset D$ und sei g monoton wachsend und konkav auf R . Dann ist $g \circ f$ ebenfalls konkav.

Inverse von Funktionen

Sei f streng monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g = f^{-1}$ streng monoton wachsend und konvex.

8.4 Tests der ersten Ableitung



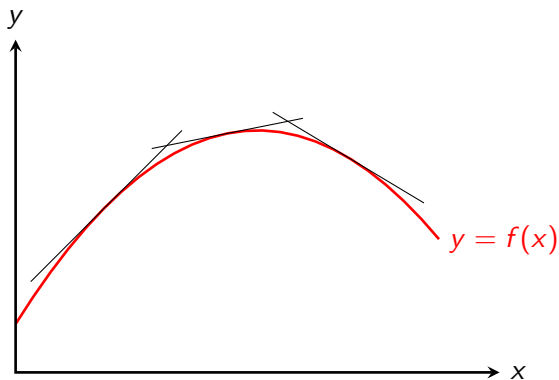
Charakterisierung von konkaven und konvexen Funktionen

Die Funktion f sei differenzierbar auf einem offenen Intervall I .
Dann gilt:

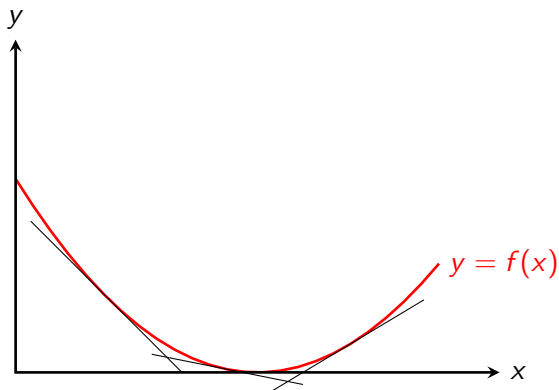
- ▶ f ist konkav genau dann, wenn für alle x_0 und x in I gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

f konkav: Die Steigung der Tangente fällt in x



f konvex: Die Steigung der Tangente wächst in x



8.5 Tests der zweiten Ableitung

Sei f stetig auf dem Intervall I und zweimal differenzierbar im Inneren von I .

f ist **konkav** auf $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \forall x$ im Inneren von I
 $\Leftrightarrow f'$ ist monoton fallend auf I

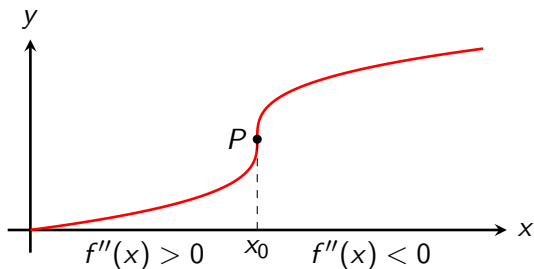
f ist **konvex** auf $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \forall x$ im Inneren von I
 $\Leftrightarrow f'$ ist monoton wachsend auf I

8.6 Wendestellen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Stelle x_0 heißt **Wendestelle** für f , falls f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Der Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** des Graphen von f .



Zusammenfassung

- ▶ Konkavität / Konvexität
- ▶ Summen und Minima / Maxima
- ▶ Verkettung und Inverse
- ▶ Tests der ersten Ableitung
- ▶ Tests der zweiten Ableitung
- ▶ Wendestellen und Wendepunkte