Vorlesung zu Kapitel 08:[1]

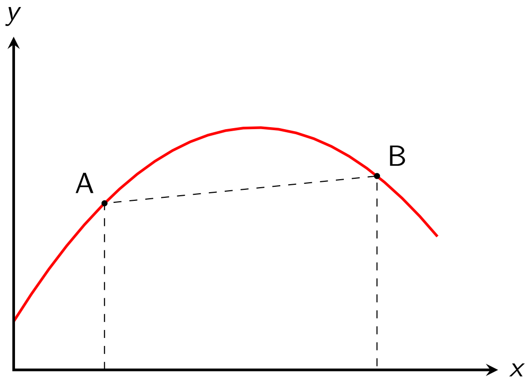
Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

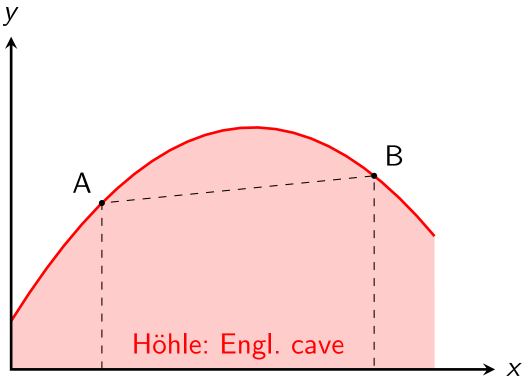
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

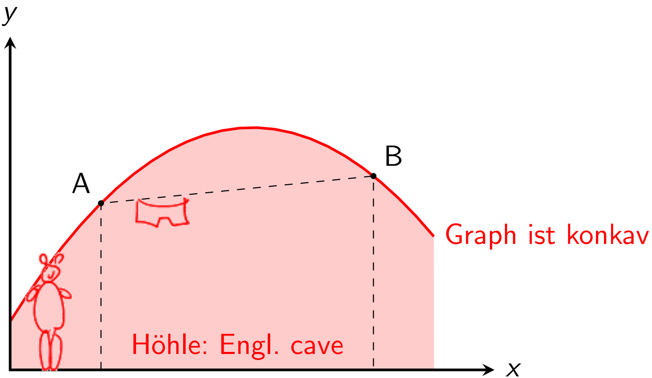
8.1 Intuition: Wäscheleine



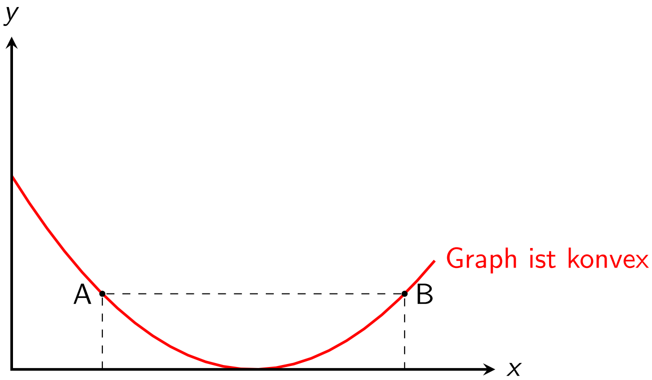
8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang



8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang



8.1 Intuition: Seil über Bach



8.2 Definition Konvexkombination

Mischung

"Lambda"

Für zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$x(\lambda) = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$$

eine **Konvexkombination** von x_1 und x_2.

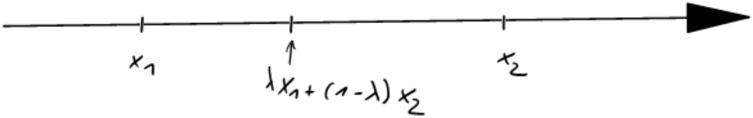
Es gilt zum Beispiel:

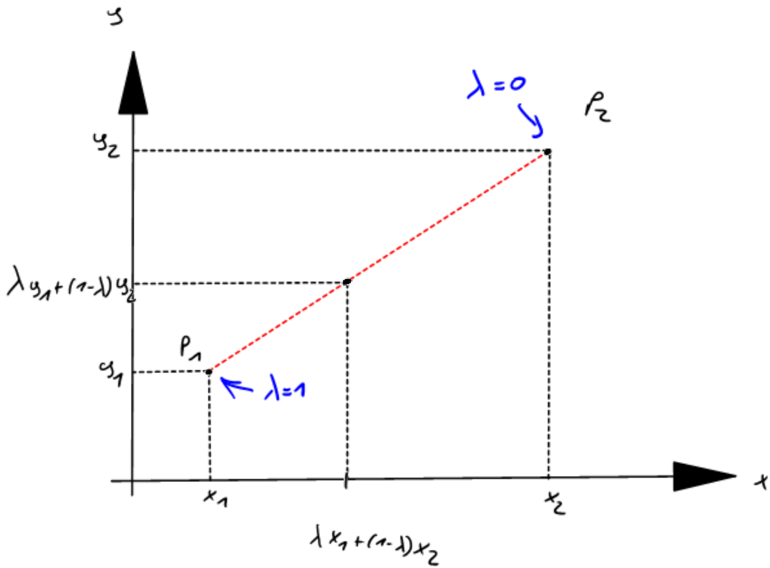
$$x(0) = x_2,\ x(0,5) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ x(1) = x_1$$

Für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(x(\lambda), y(\lambda)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2)$$

eine Konvexkombinationen dieser beiden Punkte.


x_1
$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$
x_2



y
x
y_2
$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$
y_1
x_1
x_2
$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$
P_1
P_2
$\lambda = 0$
$\lambda = 1$

8.2 Definition konkave Funktion

Eine Funktion f, definiert auf einem Intervall I, heißt **konkav** auf I, falls

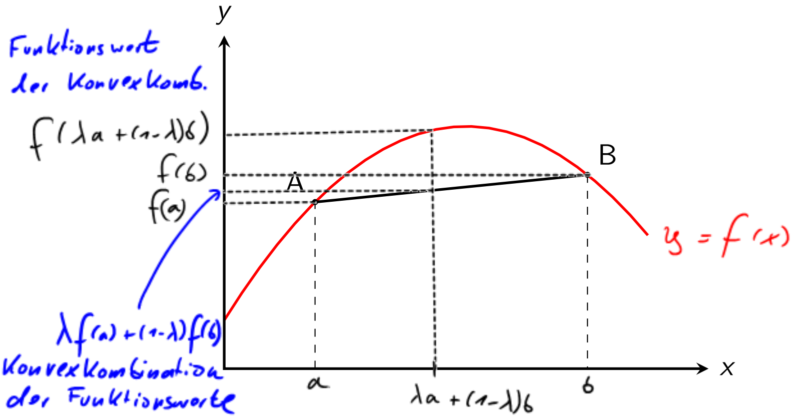
$$\underbrace{f(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b)}_{\text{Funktionswert der Konvexkombination}} \geq \underbrace{\lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b)}_{\text{Konvexkombination der Funktionswerte}}$$

für alle a und b in I und alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung strikt ist, wenn $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$, dann ist f **strikt konkav**.

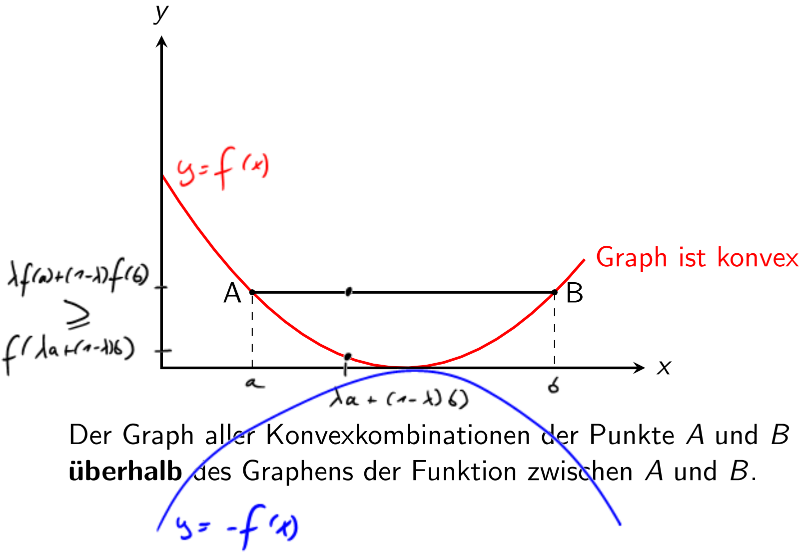
Der Funktionswert einer Konvexkombination von a und b muss mindestens so groß sein wie die Konvexkombination der Funktionswerte an den Stellen a und b – für jede beliebige Konvexkombination.

Graphische Veranschaulichung Konkavität



Der Graph aller Konvexkombinationen der Punkte A und B liegt **unterhalb** des Graphens der Funktion zwischen A und B.

Graphische Veranschaulichung Konvexität



Der Graph aller Konvexkombinationen der Punkte A und B liegt **überhalb** des Graphens der Funktion zwischen A und B.

8.2 Definition konvexe Funktion

Eine Funktion f, definiert auf einem Intervall I, heißt **konvex** auf I, falls

$$f(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b)$$

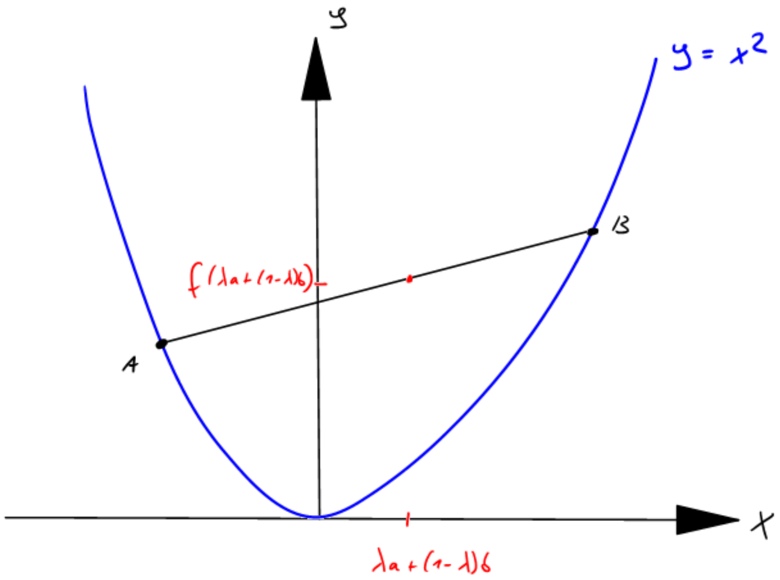
für alle a und b in I und alle Zahlen $\lambda \in [0,1]$.

Wenn die Ungleichung strikt ist, wenn $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$, dann ist f **strikt konvex**.

Der Funktionswert einer Konvexkombination von a und b darf höchstens so groß sein wie die Konvexkombination der Funktionswerte an den Stellen a und b – für jede beliebige Konvexkombination.

Anmerkung: Falls f konvex ist, so ist $-f$ konkav.

Bsp. $f(x) = x^2$



$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) = (\lambda a + (1-\lambda) b)^2$$
$$= (\lambda a)^2 + 2\lambda a (1-\lambda) b + ((1-\lambda) b)^2$$
$$= \lambda^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda) a b + (1-\lambda)^2 b^2$$

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda a^2 + (1-\lambda) b^2$$

zu zeigen:

$$\lambda^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda) a b + (1-\lambda)^2 b^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda) b^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 a^2 - \lambda a^2 + 2\lambda(1-\lambda) a b + (1-\lambda)^2 b^2 - (1-\lambda) b^2 \leq 0$$

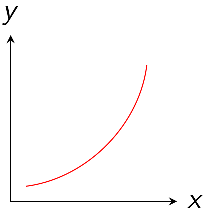
$$\Leftrightarrow \lambda a^2 \underbrace{(\lambda - 1)}_{-(1-\lambda)} + 2\lambda(1-\lambda) a b + (1-\lambda) b^2 (\cancel{1} - \lambda - \cancel{1}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(-1) + 2ab + b^2(-1) \leq 0$$

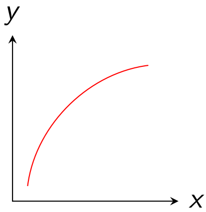
$$\Leftrightarrow -(a^2 - 2ab + b^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(a-b)^2 \leq 0 \qquad (< 0, \text{ falls } a \neq b)$$

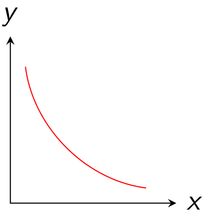
Monotonie und Krümmung



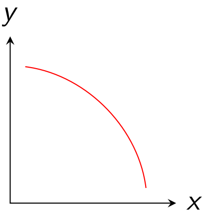
wachsend, konvex



wachsend, konkav



fallend, konvex



fallend, konkav

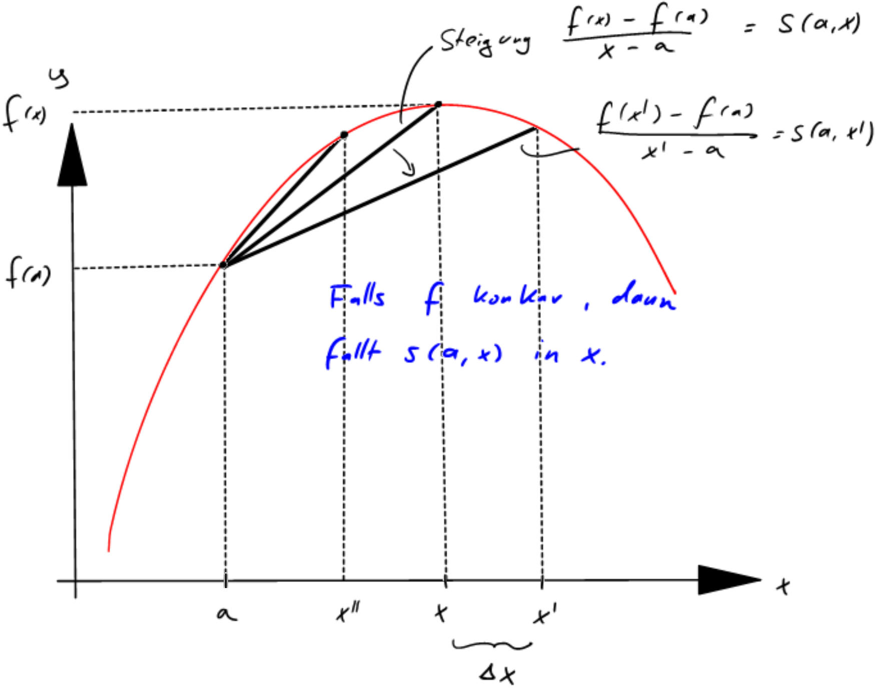
Steigungs-Charakterisierung

Sei die Funktion f definiert auf einem Intervall I und seien a und x in I mit $x > a$. Die Steigung der Sekante von $(a, f(a))$ nach $(x, f(x))$ sei definiert durch

$$s(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Eine Funktion f, definiert auf einem Intervall I, ist:

- (strikt) konkav, genau dann, wenn für jedes feste a in I die Steigung $s(a, x)$ (strikt) monoton fallend ist in x;
- (strikt) konvex, genau dann, wenn für jedes feste a in I die Steigung $s(a, x)$ (strikt) monoton wachsend ist in x.



Steigung
$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s(a,x)$
$\frac{f(x') - f(a)}{x' - a} = s(a,x')$
y
f(x)
f(a)
Falls f konkav, dann
fällt s(a,x) in x.
a
x''
x
x'
x
Δx

8.3 Allgemeine Eigenschaften

Wir präsentieren in diesem Abschnitt allgemeine Eigenschaften konkaver Funktionen. Mit der Regel

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow -f \text{ konvex}$$

Lassen sich diese Eigenschaften leicht für konvexe Funktionen anwenden.

Summen

$$-f+(-g) = -(\underbrace{\underbrace{f+g}_{\text{konkav}}}_{\text{konvex}})$$

$-f$ und $-g$ konvex

Sind die Funktionen f und g konkav auf einem Intervall I, so ist $f+g$ ebenfalls konkav auf I.

Ist hierbei f oder g strikt konkav, so ist $f+g$ strikt konkav.

1. Funktion strikt konvex
2. Funktion konvex

Summe: strikt konvex

Beispiel:

Ist $f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{1. Funktion}} \underbrace{-2x+2}_{\text{2. Funktion}}$ konkav, konvex, oder weder noch?

von eben: x^2 ist strikt konvex ✓

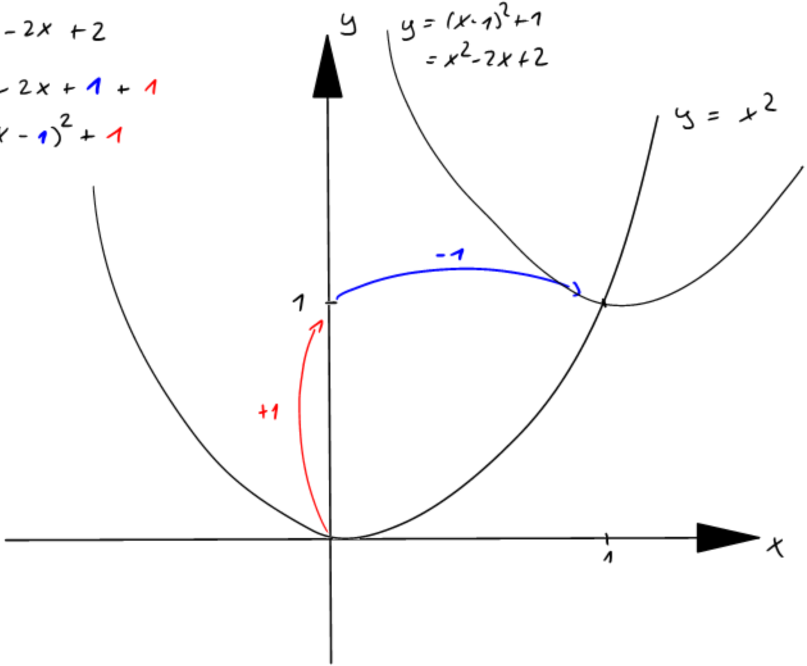
$-2x+2$ Steigung ist konstant $(= -2)$ und damit monoton fallend und wachsend

$\Rightarrow$ $-2x+2$ konkav & konvex

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$x^2 - 2x + 1 + 1$

$(x - 1)^2 + 1$



Minima und Maxima

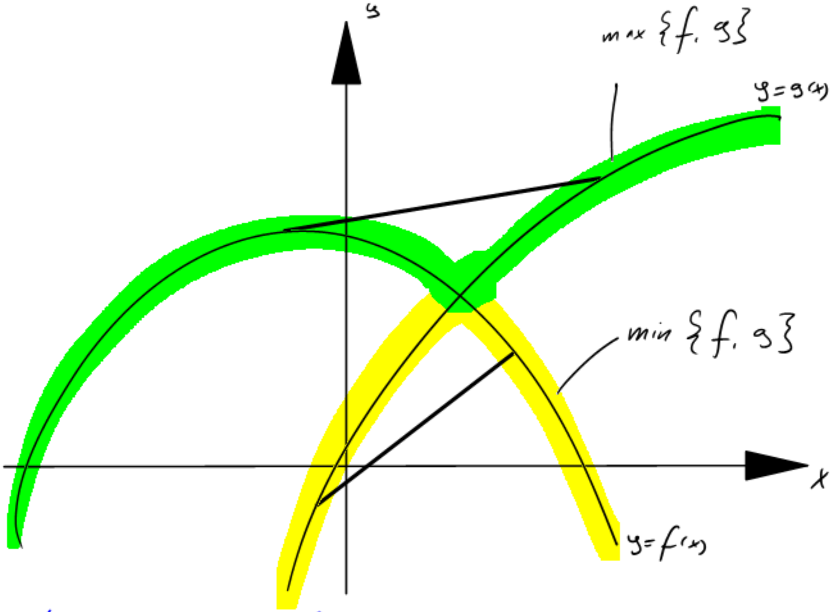
Sind die Funktionen f und g konkav auf einem Intervall I, so ist $\min\{f, g\}$ ebenfalls konkav auf I.

Steigungen konstant
$\Rightarrow f$ & g konkav & konvex
$\Rightarrow \max\{f, g\}$ konvex

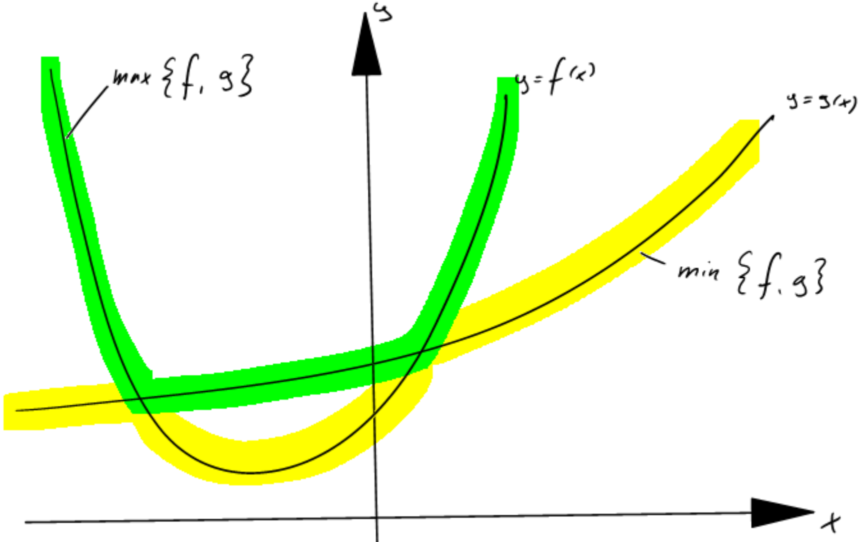
Beispiele:

Sei $f(x) = a + bx$ und sei $g(x) = \alpha + \beta x$. Ist $\underline{\max\{f, g\}}$ konkav, konvex oder weder noch?

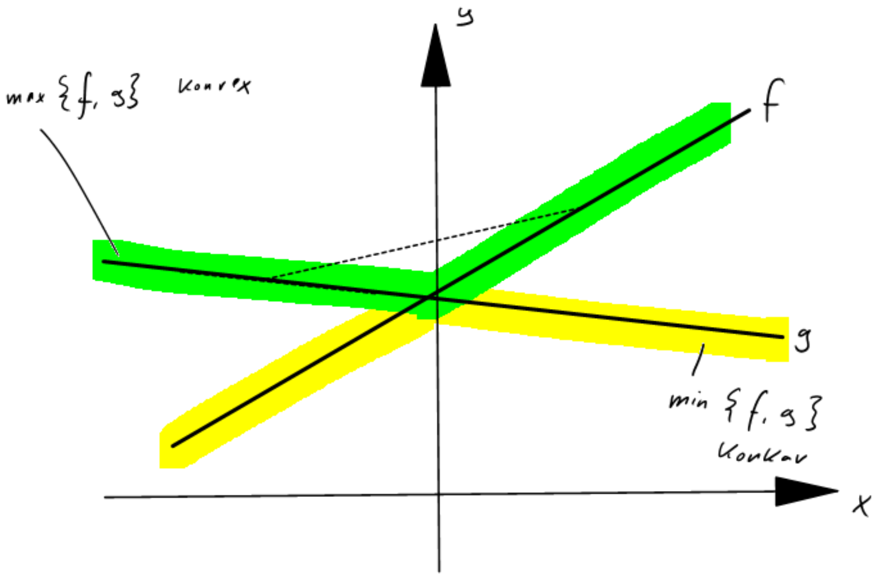
Ist $f(x) = |x|$ konkav, konvex, oder weder noch?



f & g konkav $\Rightarrow$ min $\{f, g\}$ konkav



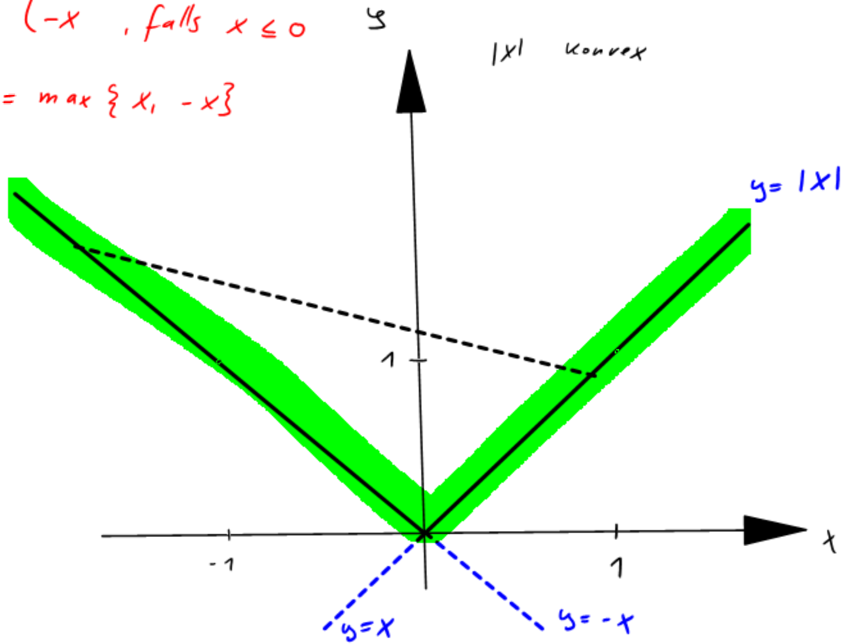
f & g konvex $\Rightarrow$ $\max\{f, g\}$ konvex



y
max {f, g} konvex
f
g
min {f, g}
konkav
x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x > 0 \\ -x & \text{, falls } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \max\{x, -x\}$$



Verkettung von Funktionen

Sei $f : D \to R$ konkav auf Intervall $I \subset D$ und sei g monoton wachsend und konkav auf R. Dann ist $g \circ f$ ebenfalls konkav.

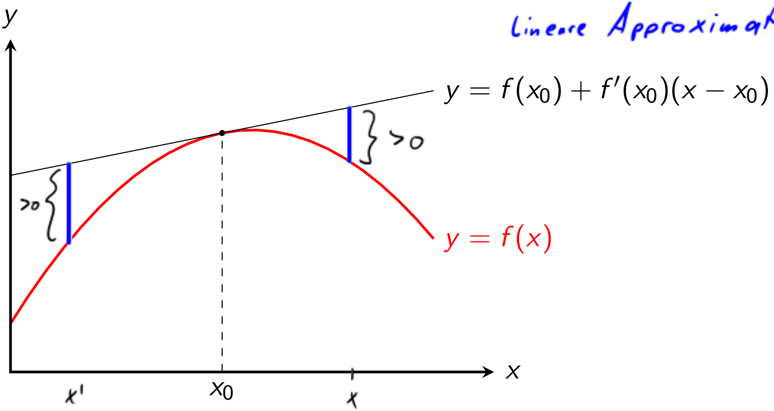
Inverse von Funktionen

Sei f streng monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g = f^{-1}$ streng monoton wachsend und konvex.

8.4 Tests der ersten Ableitung

Lineare Approximation



Charakterisierung von konkaven und konvexen Funktionen

Die Funktion f sei differenzierbar auf einem offenen Intervall I.
Dann gilt:

- f ist konkav genau dann, wenn für alle x_0 und x in I gilt:

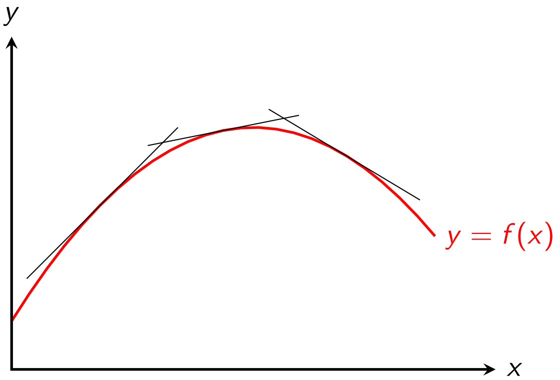
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Funktionswert wird überschätzt

f konvex: " unterschätzt

f konkav: Die Steigung der Tangente fällt in x

= "Die 1. Ableitung ist monoton fallend."



f konvex: Die Steigung der Tangente wächst in x

= "Die 1. Ableitung ist monoton steigend."

8.5 Tests der zweiten Ableitung

Sei f stetig auf dem Intervall I und zweimal differenzierbar im Inneren von I.

2. Ableitung = 1. Ableitung von der 1. Ableitung

$$f \text{ ist } \textbf{konkav} \text{ auf } I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ \forall \ x \text{ im Inneren von } I$$
$$\Leftrightarrow f' \text{ ist monoton fallend auf } I$$

$$f \text{ ist } \textbf{konvex} \text{ auf } I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \forall \ x \text{ im Inneren von } I$$
$$\Leftrightarrow f' \text{ ist monoton wachsend auf } I$$

Probe

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$f'(x) = 2x - 2$

$f''(x) = 2 \overset{\text{strikt}}{>} 0 \quad \overset{\Rightarrow}{\Rightarrow}$ 1. Ableitung ist strikt monoton wachsend

$\Rightarrow f$ strikt konvex

Aber f strikt konvex $\not\Rightarrow f'' > 0$

Bsp: $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

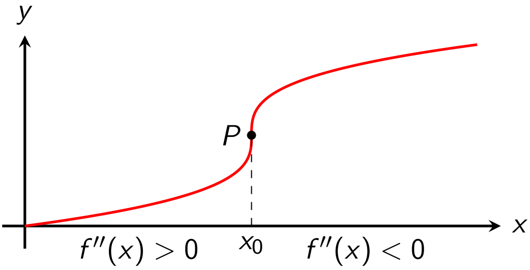
$f''(x) = 12x^2$ für $x = 0$: $f''(0) = 0$

8.6 Wendestellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Die Stelle x_0 heißt **Wendestelle** für f, falls f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Der Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** des Graphen von f.



Zusammenfassung

- Konkavität / Konvexität
- Summen und Minima / Maxima
- Verkettung und Inverse
- Tests der ersten Ableitung
- Tests der zweiten Ableitung
- Wendestellen und Wendepunkte