

Anwendungen der Differentialrechnung



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

7.1 Implizites Differenzieren

7.3 Ableitung der Inversen

7.4 Lineare Approximation

7.5 Polynomiale Approximation

7.7 Elastizitäten

7.8 Stetigkeit

7.9 Mehr über Grenzwerte

7.10 Der Zwischenwertsatz

7.12 Regel von L'Hôpital

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$xf(x) = 18$$

$$\sqrt{f(x)} = x$$

$$f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$$

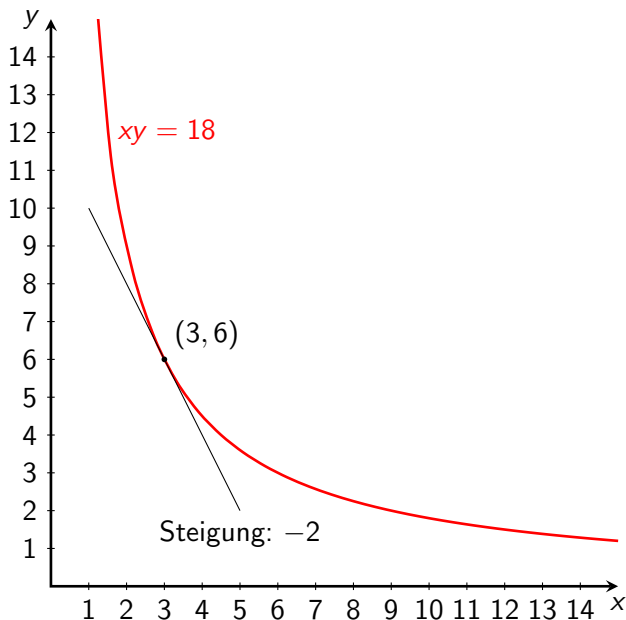
Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

Implizite Differentiation

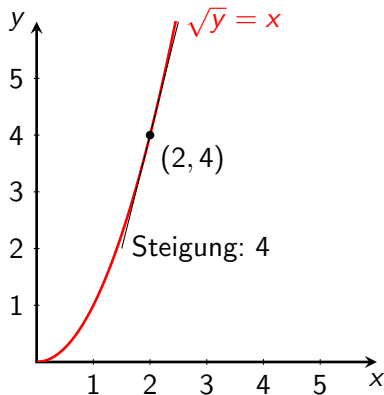
Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du y' so:

- (i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x . Betrachte dabei y als Funktion von x .
- (ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

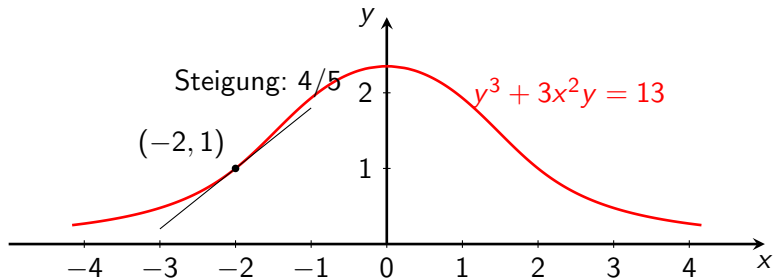
Beispiel: $xf(x) = 18$ für $x > 0$



Beispiel: $\sqrt{f(x)} = x$ für $f(x), x > 0$



Beispiel: $f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$



7.3 Ableitung der Inversen

Sei f eine differenzierbare Funktion mit der inversen Funktion g .

Wenn für einen inneren Punkt x_0 gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Es gelte $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x)$, $g(y)$ und $g'(y)$?

7.4 Lineare Approximation

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

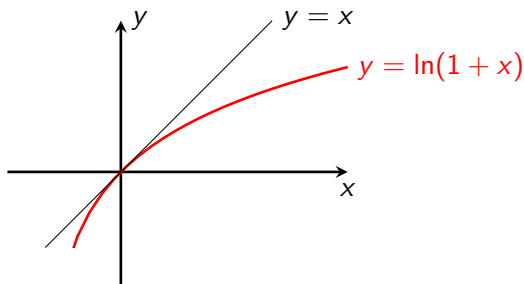
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

(Siehe Gleichung einer Tangente.)

Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel: $f(x) = \ln(1 + x)$



Lineare Approximation: Übung

Wie lautet die lineare Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe eines beliebigen Punktes $x_0 > -1$?

Das Differential einer Funktion

Sei f eine differenzierbare Funktion und $dx \neq 0$ eine beliebige Änderung der Variablen x

Differential von $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$

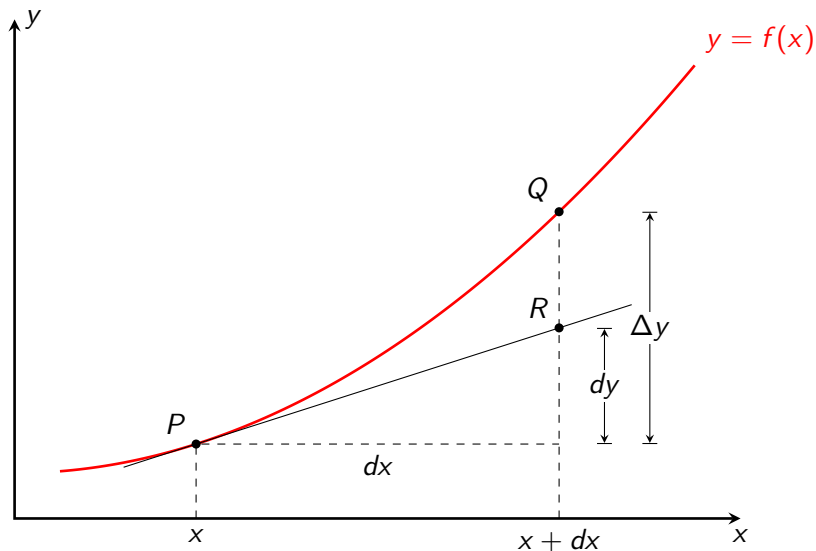
Differenz des Funktionswertes $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Für dx klein gilt

$$\Delta y \approx dy$$

Darstellung des Differentials dy und der Differenz Δy



Differenz und Differential: Übung

Berechne das Differential dy und die Differenz Δy für folgende Funktion:

$$f(x) = 1 + x^2$$

Begründe, warum $dy \approx \Delta y$ für dx klein.

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Quadratische Approximation: Übung

Wie lautet die quadratische Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe $x = x_0$?

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von f** bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)\%$.

Relative Änderungen

%-Änderung des Funktionswertes $f(x)$:
$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta f}{f(x)}$$

%-Änderung der Variablen x :
$$\frac{x + dx - x}{x} = \frac{dx}{x}$$

Rate der relativen Änderungen:

$$\frac{\text{\% - Änderung } f(x)}{\text{\% - Änderung } x} = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\Delta f}{f(x)} \frac{x}{dx} = \frac{\Delta f}{dx} \frac{x}{f(x)}$$

Falls dx klein: $\Delta f \approx df$ und

$$\frac{\text{\% - Änderung } f(x)}{\text{\% - Änderung } x} \approx \frac{df}{dx} \frac{x}{f(x)} = El_x f(x)$$

Preiselastizität der Nachfrage: Übung

$$D(p) = \begin{cases} 8 - \frac{4}{3}p & \text{falls } p < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne den Graph von D in ein Diagramm.
Trage hierbei den Preis auf der vertikalen Achse ein.
2. Berechne die Elastizität von D für $0 \leq p < 6$
3. Kennzeichne die Bereiche $El_p D(p) < -1$ und $El_p D(p) > -1$.

Elastizität eines Produktes von Funktionen

Die Elastizität eines Produktes von Funktionen ist die Summe der Elastizitäten der Funktionen:

$$(f(x)g(x))' \frac{x}{f(x)g(x)} = f'(x) \frac{x}{f(x)} + g'(x) \frac{x}{g(x)}$$

Preiselastizität des Erlöses

Sei $R(p) = D(p)p$ der Erlös.

Die Elastizität der Erlösfunktion $R(p)$ bezüglich des Preises p ist:

$$El_p R(p) = \frac{dR(p)}{dp} \frac{p}{R(p)} =$$

Wann ist die Elastizität des Erlöses gleich null?

Elastizität von Potenzfunktionen

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0, 1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

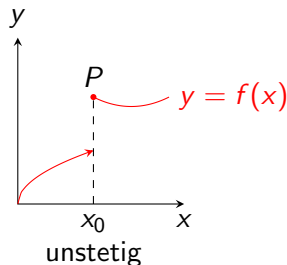
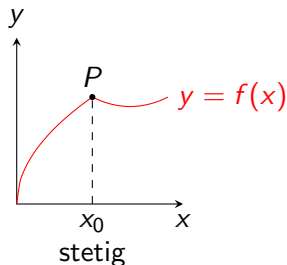
Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

- (a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0 .
- (b) fg und f/g , falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0 .
- (c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0 , falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.
- (d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I , so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

Stetigkeit: Übung

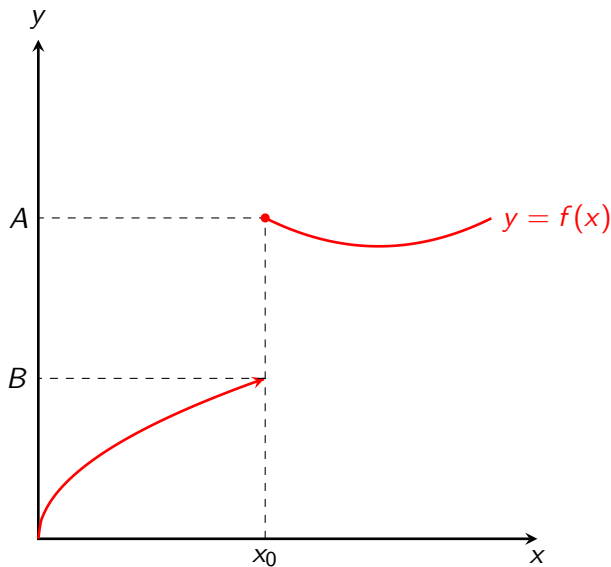
Welche der drei folgenden Funktionen ist/sind stetig?

$$f(x) = x^2 - 1 + 4\sqrt{x} - (1+x)^2, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 0,7 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

7.9 Mehr über Grenzwerte: Fehlender Grenzwert



Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B , wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A , wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} A$$

Einseitige Stetigkeit

Sei f eine Funktion deren Definitionsbereich ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A , wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

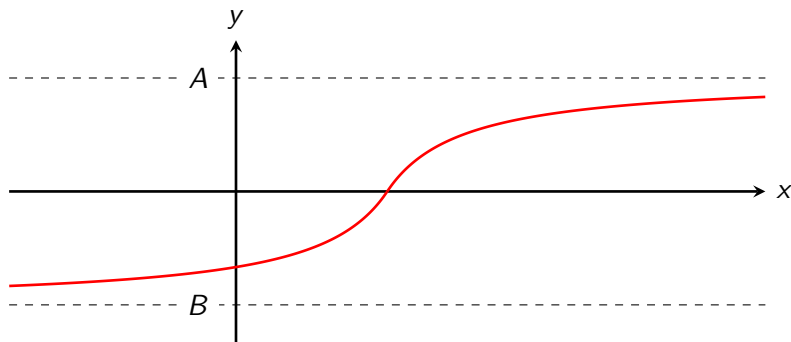
Notation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$$

Analog:

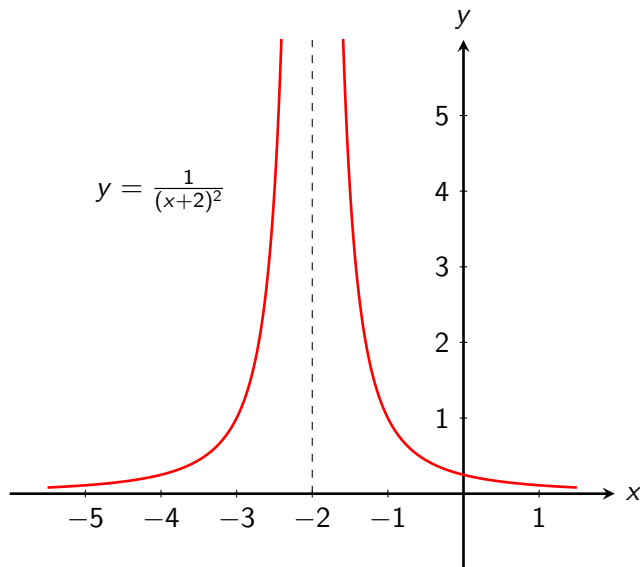
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} B$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$$

Grenzwert im Unendlichen: vertikale Asymptote



Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Falls die Funktionswerte von f und g mit $x \rightarrow x_0$ gegen unendlich streben, schreiben wir $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$.

Dann gilt:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \text{ und } f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \text{ mit } x \rightarrow x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \rightarrow x_0$.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.

Beispiel:

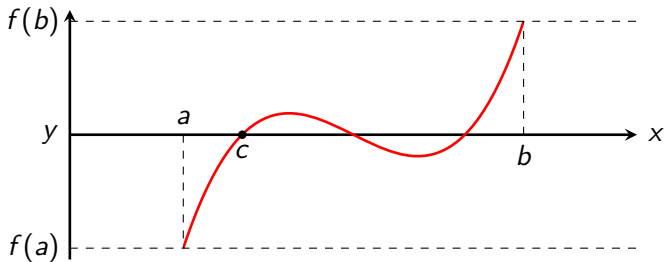
Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien f und g zwei stetige Funktionen mit $g(x_0) = 0$ für ein x_0 .

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

Regel von L'Hôpital

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Zusammenfassung

- ▶ Implizites Differenzieren
- ▶ Ableitung der Inversen
- ▶ Approximation
- ▶ Elastizitäten
- ▶ Stetigkeit
- ▶ Zwischenwertsatz
- ▶ L'Hôpital