

Anwendungen der Differentialrechnung



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

- 7.1 Implizites Differenzieren
- 7.3 Ableitung der Inversen
- 7.4 Lineare Approximation
- 7.5 Polynomiale Approximation
- 7.7 Elastizitäten
- 7.8 Stetigkeit
- 7.9 Mehr über Grenzwerte
- 7.10 Der Zwischenwertsatz
- 7.11 Unendliche Folgen
- 7.12 Regel von L'Hôpital

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$xf(x) = 5$$

$$\sqrt{f(x)} = x$$

$$f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$$

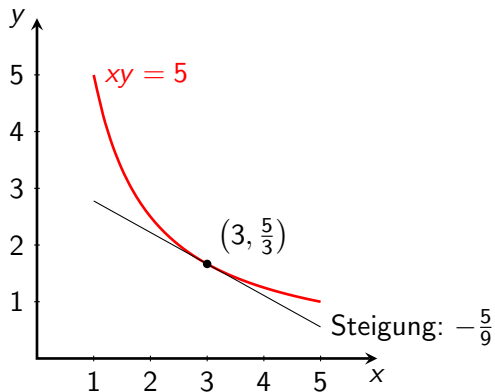
Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

Implizite Differentiation

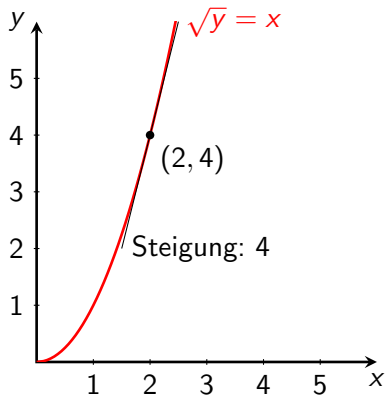
Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du y' so:

- (i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x . Betrachte dabei y als Funktion von x .
- (ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

Beispiel: $xf(x) = 5$ für $x > 0$



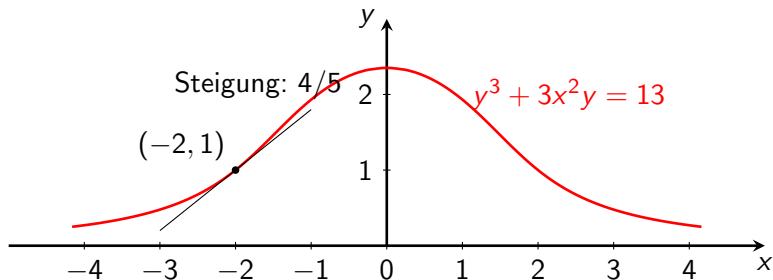
Beispiel: $\sqrt{f(x)} = x$ für $f(x), x > 0$



Beispiel: $f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$

Leite beide Seiten nach x ab!

$$3y^2y' + 3(2xy + x^2y') = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2xy}{y^2 + x^2}$$



7.3 Ableitung der Inversen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und habe eine inverse Funktion g .
Wenn für $x_0 \in D$ gilt $f'(x_0) \neq 0$ und x_0 ein innerer Punkt von D ist, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

7.3 Ableitung der Inversen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und habe eine inverse Funktion g . Wenn für $x_0 \in D$ gilt $f'(x_0) \neq 0$ und x_0 ein innerer Punkt von D ist, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Begründung:

Die inverse Funktion g ist implizit durch $f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(D)$ definiert. Ableitung und Anwendung der Kettenregel ergibt $f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$.

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ eine streng monoton steigende und differenzierbare Produktionsfunktion:

Bei gegebener Inputmenge $x \geq 0$ kann die Outputmenge $y = f(x)$ produziert werden.

Sei $g : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ die zugehörige Faktornachfragefunktion:

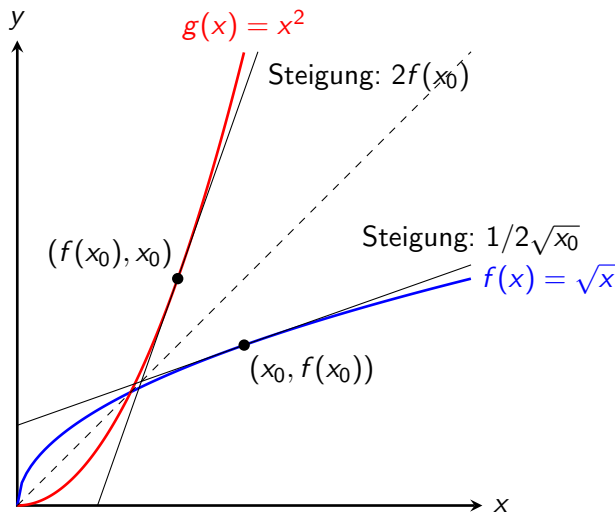
Um eine gegebene Outputmenge $y \geq 0$ zu produzieren wird die Inputmenge $x = g(y)$ benötigt.

Es gilt $f(g(y)) = y$ bzw. $g(f(x)) = x$ für alle $y, x \in \mathbb{R}_{\geq}$.

Zum Beispiel gelte $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x)$, $g(y)$ und $g'(y)$?

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage



7.4 Lineare Approximation

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

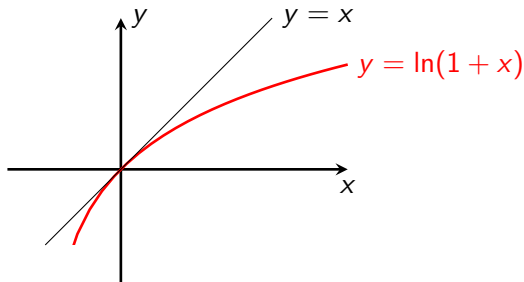
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

(Siehe Gleichung einer Tangente.)

Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel: $f(x) = \ln(1 + x)$



$\ln(1 + x) \approx \ln(1 + x_0) + \frac{1}{1+x_0}(x - x_0)$ für x nahe x_0 .

Mit $x_0 = 0$ gilt: $\ln(1 + x) \approx x$.

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von f** bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)\%$.

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von f** bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$ %.

Betrachte hierzu die relative Änderungsrate

$$\frac{\% \text{-Änderung } f(x)}{\% \text{-Änderung } x} = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{x}{f(x)} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx} \frac{x}{f(x)} = El_x f(x)$$

Input-Elastizität von Produktionsfunktionen

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0, 1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Input-Elastizität von Produktionsfunktionen

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0, 1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

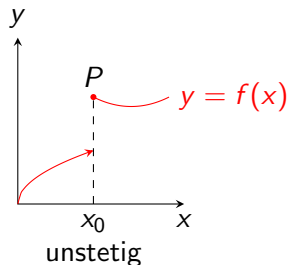
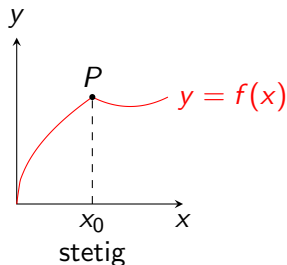
$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)} = Arx^{r-1} \frac{x}{Ax^r} = r$$

Steigt die Inputmenge um 1%, steigt die Outputmenge um $r\%$.

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



Eigenschaften von stetigen Funktionen

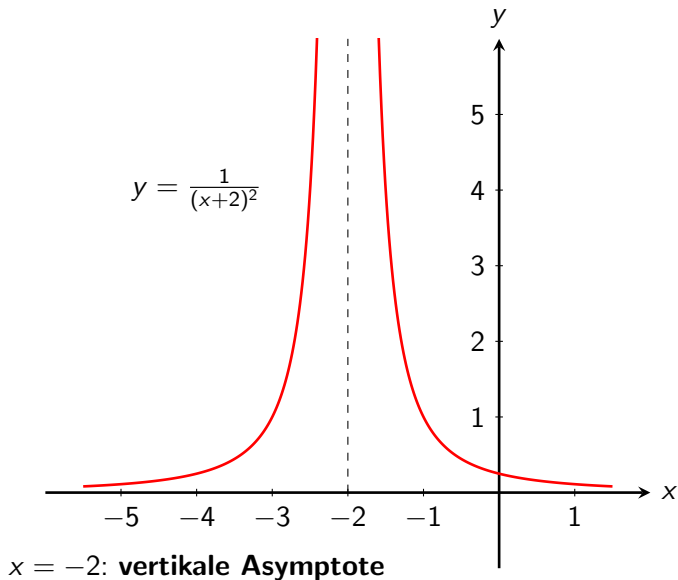
Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

- (a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0 .
- (b) fg und f/g , falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0 .
- (c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0 , falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.
- (d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I , so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

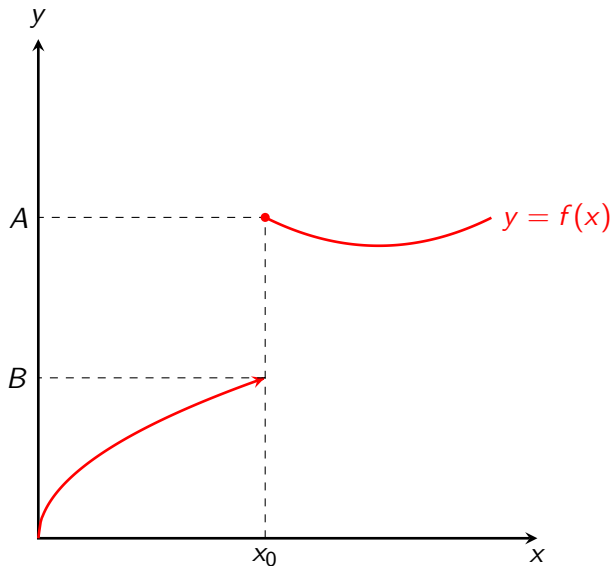
Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

7.9 Mehr über Grenzwerte

Fehlender Grenzwert: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} \infty$



Fehlender Grenzwert: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} B \neq f(x_0)$



Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B , wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A , wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} A$$

Einseitige Stetigkeit

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A , wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$$

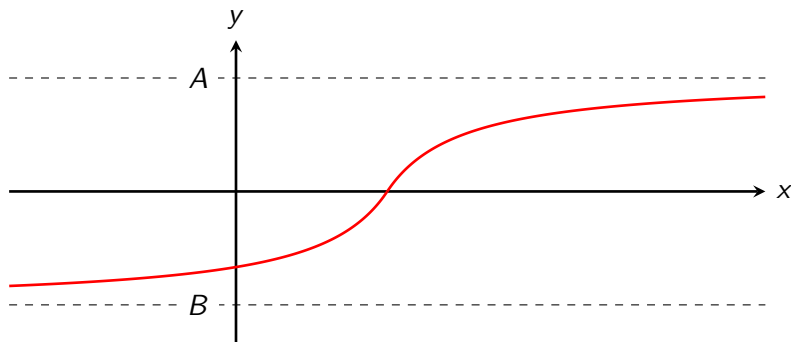
$f(x)$ hat den Grenzwert B , wenn x gegen minus unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an B gewählt werden, indem man x hinreichend klein wählt.

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} B$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$$

Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

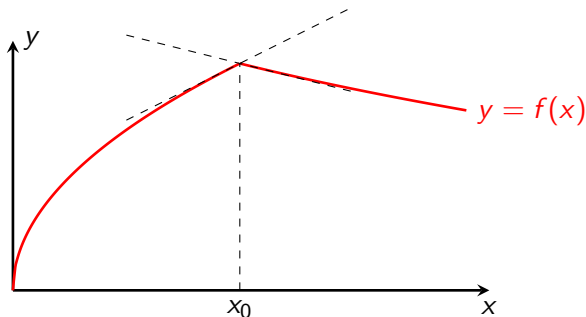
Wenn $f(x) \rightarrow \infty$ und $g(x) \rightarrow \infty$, wenn $x \rightarrow x_0$, dann gilt:

$$f(x) + g(x) \rightarrow \infty \text{ und } f(x)g(x) \rightarrow \infty, \text{ wenn } x \rightarrow x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \rightarrow x_0$.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.



Es gilt zwar

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

aber nicht

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

Betrachte

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x$$

für ein beliebiges $\Delta x \neq 0$.

Dann gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Wegen $f(x_0 + \Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0)$ ist f stetig.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

Die $\epsilon - \delta$ Definition des Grenzwertes

Wir sagen, dass $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert A hat,

wenn für jede Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert,

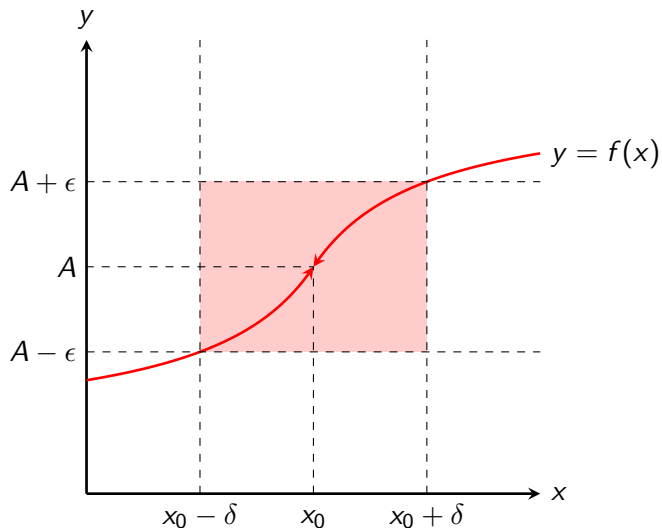
so dass $f(x)$ nicht weiter als ϵ entfernt ist von A für alle x , die nicht weiter als δ entfernt sind von x_0 .

Wenn dies gilt, schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

und sagen auch, dass $f(x)$ gegen A strebt, wenn x gegen x_0 strebt.

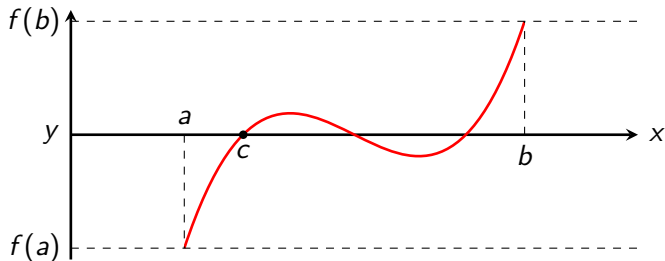
Die $\epsilon - \delta$ Stetigkeit



7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



7.11 Unendliche Folgen

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl $s(n)$ zuordnet:

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Funktionswerte werden gewöhnlich mit Indizes bezeichnet:

$$s(1) = s_1, s(2) = s_2, \dots, s(n) = s_n, \dots$$

Die Menge aller Funktionswerte der Folge bezeichnet man mit

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ oder auch mit } \{s_n\} .$$

Oft wird diese Menge selbst auch Folge genannt.

Beispiel: $s(n) = \frac{1}{n}$

$$s_1 = 1, s_2 = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{3}, \dots, s_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Konvergenz von Folgen

Eine Folge $\{s_n\}$ **konvergiert** gegen eine Zahl s , wenn s_n beliebig nahe an s gewählt werden kann, indem man n hinreichend groß wählt.

Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{oder} \quad s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s .$$

Eine Folge, die nicht gegen eine reelle Zahl konvergiert, **divergiert**.

Da eine Folge eine Funktion ist, können wir alle Regeln für Grenzwerte von Funktionen auch für Grenzwerte von Folgen anwenden.

7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $g(x_0) = 0$ für $x_0 \in D$.

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

Beispiel: Durchschnittskosten

Betrachtet sei eine Kostenfunktion

$$C(q) = F + C_v(q)$$

für $q \geq 0$, wobei $F = C(0) > 0$ die Fixkosten bezeichnet und $C_v(q)$ mit $C_v(0) = 0$ die variablen Kosten.

Für $q > 0$ seien die Durchschnittskosten durch

$$A(q) = C(q)/q$$

definiert und die durchschnittlichen variablen Kosten seien durch

$$A_v(q) = C_v(q)/q$$

definiert.

Es gilt $A(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0^+} \infty$ aber $A_v(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0^+} \frac{C_v(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (!?)

Regel von L'Hôpital

Schreibe für $x \neq x_0$ und $f(x_0) = g(x_0) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}{(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)}$$

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}{(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel Durchschnittskosten:

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_v(q)}{q} = \frac{C'_v(0)}{1} = C'_v(0) (= C'(0))$$

Zusammenfassung

- ▶ Implizites Differenzieren
- ▶ Ableitung der Inversen
- ▶ Approximation
- ▶ Elastizitäten
- ▶ Stetigkeit
- ▶ Zwischenwertsatz
- ▶ L'Hôpital