Vorlesung zu Kapitel 07:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

7.1 Implizites Differenzieren

7.3 Ableitung der Inversen

7.4 Lineare Approximation

7.5 Polynomiale Approximation

7.7 Elastizitäten

7.8 Stetigkeit

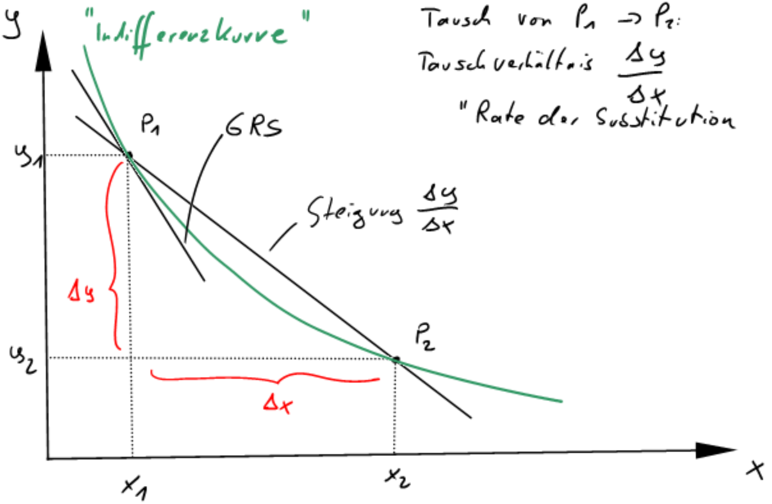
7.9 Mehr über Grenzwerte

7.10 Der Zwischenwertsatz

7.11 Unendliche Folgen

7.12 Regel von L'Hôpital

Anwendung: Grenzrate der Substitution GRS



Tausch von $P_1 \to P_2$:

Tauschverhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

"Rate der Substitution"

GRS Steigung der I-Kurve

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$xf(x) = 5 \quad | : x \quad (\text{falls } x \neq 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{5}{x}$$

$$\sqrt{f(x)} = x$$

$$f(x)^3 + 3x^2 f(x) = 13$$

Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

Implizite Differentiation

$f(x)$

Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du y' so:

(i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x. Betrachte dabei y als Funktion von x.

(ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

Implizite Ableitung

$$x \cdot y = 5$$

$(\text{wobei } y = f(x))$

leite beide Seiten der Gleichung nach x ab,
wobei y von x abhängt.

Produktregel!

gesucht

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \quad | -y$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y' = -y \quad | : x \ (\text{falls } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{y \cdot x}{x \cdot x}} = -\frac{y \cdot x}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$$

Probe:

$$x \cdot y = 5 \quad | :x \quad (\text{falls } x \neq 0)$$

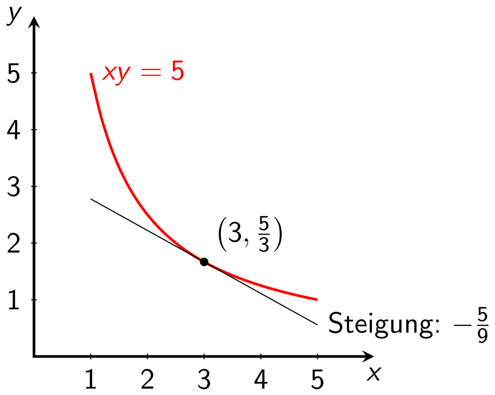
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{x}$$

Ableiten: $y' = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(5 \cdot x^{-1}\right)'$

$$= -1 \cdot 5 \cdot x^{-2} = -5 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{5}{x^2}}$$

Beispiel: $xf(x) = 5$ für $x > 0$



$= -\frac{y}{x} = -\frac{5/3}{3}$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = x}$$

$$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}$$

Leite beide Seiten der Gleichung ab!

Äußere Funktion $\sqrt{u}$

Äußere Ableitung $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

Innere Funktion $f(x)$

innere Ableitung $f'(x)$

Kettenregel

$$\frac{d\sqrt{f(x)}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$\frac{dx}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = 1 \quad | \cdot 2\sqrt{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 2\sqrt{f(x)}}$$

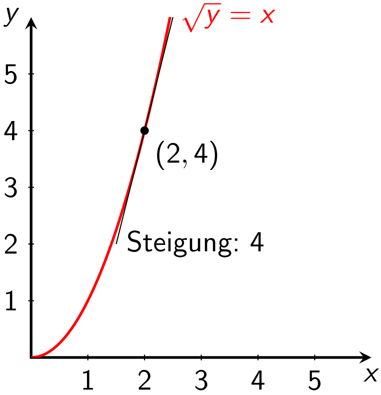
Probe

$$\sqrt{f(x)} = x \quad | \quad (\ )^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$\boxed{f'(x) = 2x} = 2\sqrt{f(x)}$$

Beispiel: $\sqrt{f(x)} = x$ für $f(x), x > 0$



Beispiel: $f(x)^3 + 3x^2 f(x) = 13$

$y^3 + 3x^2 y = 13$

$$\frac{d(y^3)}{dy} = 3y^2$$

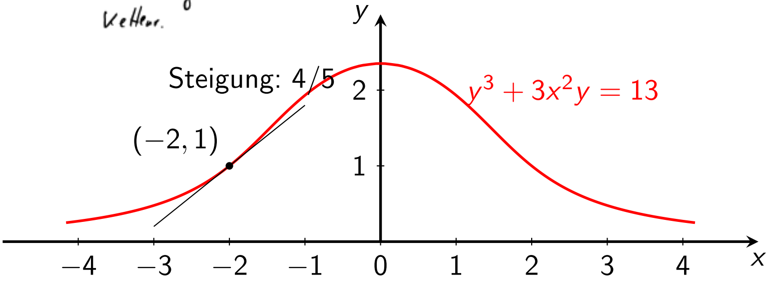
Leite beide Seiten nach x ab!

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\underbrace{3y^2}_{\text{äußere}}\underbrace{y'}_{\text{innere}} + \underbrace{3(2xy + x^2 y')}_{\text{Produktregel}} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2xy}{y^2 + x^2}$$

Ableitung

Kettenr.



7.3 Ableitung der Inversen

(der Kehrwert)

Die Ableitung der Inversen ist das Inverse der Ableitung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und habe eine inverse Funktion g. Wenn für $x_0 \in D$ gilt $f'(x_0) \neq 0$ und x_0 ein innerer Punkt von D ist, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Definition inverse Funktion:

g ist Inverse von f, falls $g(f(x)) = x$

Ableitung der Gleichung

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ (falls $f' \neq 0$) $\Leftrightarrow$ $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

7.3 Ableitung der Inversen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und habe eine inverse Funktion g. Wenn für $x_0 \in D$ gilt $f'(x_0) \neq 0$ und x_0 ein innerer Punkt von D ist, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Begründung:

Die inverse Funktion g ist implizit durch $f(g(y)) = y \ \forall\ y \in f(D)$ definiert. Ableitung und Anwendung der Kettenregel ergibt $f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$.

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Sei $f : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$ eine streng monoton steigende und differenzierbare Produktionsfunktion:

Bei gegebener Inputmenge $x \geq 0$ kann die Outputmenge $y = f(x)$ produziert werden.

Sei $g : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$ die zugehörige Faktornachfragefunktion:

Um eine gegebene Outputmenge $y \geq 0$ zu produzieren wird die Inputmenge $x = g(y)$ benötigt.

Es gilt $f(g(y)) = y$ bzw. $g(f(x)) = x$ für alle $y, x \in \mathbb{R}_{\geq}$.

Zum Beispiel gelte $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x),\ g(y)$ und $g'(y)$?

$$\sqrt{g(x)} = x \quad \Big| \; (\;)^2$$

$$g(x) = x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\sqrt{y} = x$$

$$f(y) = \sqrt{y}$$

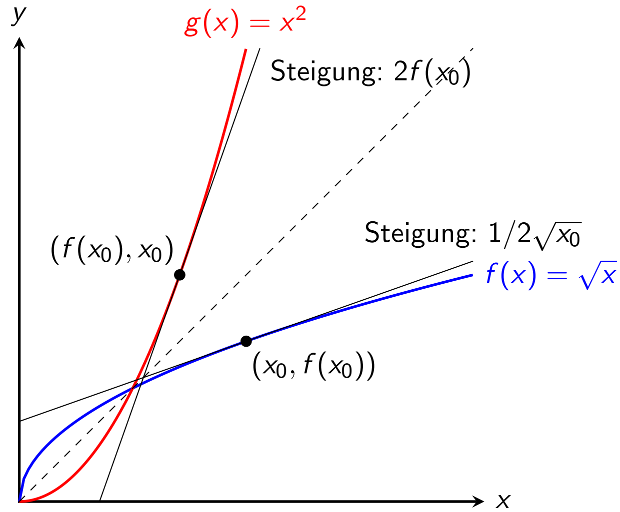
$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

$$= 2\sqrt{y}$$

$$= 2x$$

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage



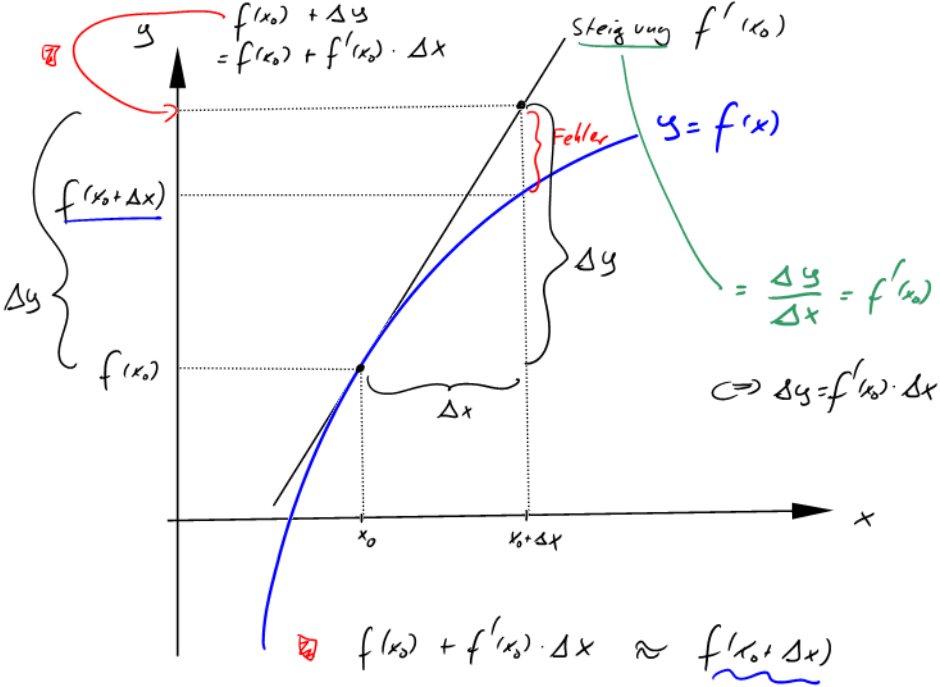
7.4 Lineare Approximation

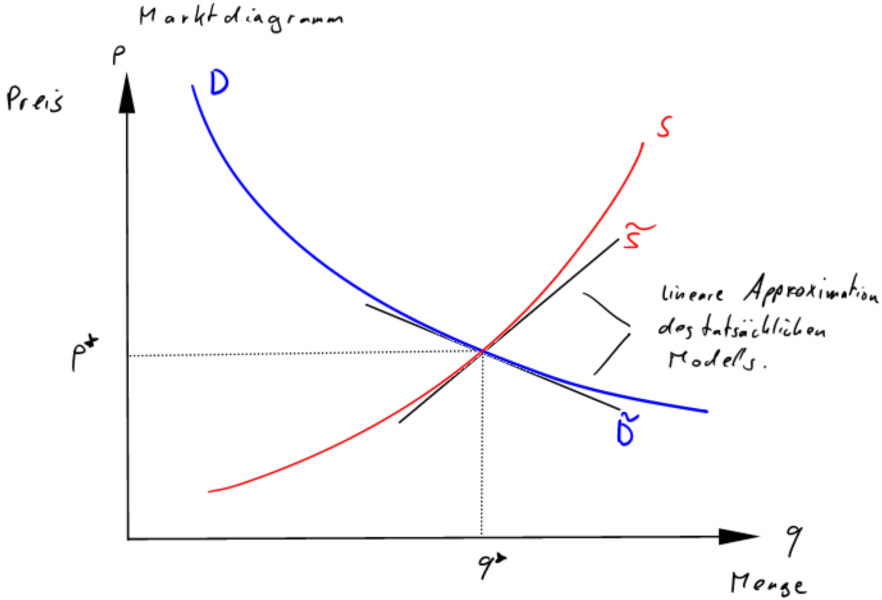
Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

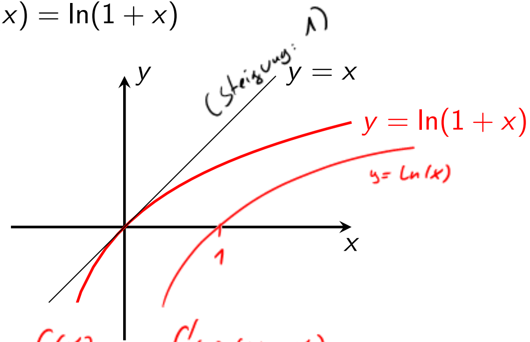
(Siehe Gleichung einer Tangente.)


y
$f(x_0) + \Delta y$
$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$
Steigung $f'(x_0)$
$y = f(x)$
Fehler
$f(x_0+\Delta x)$
Δy
Δy
$f(x_0)$
Δx
$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$
$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$
x_0
$x_0+\Delta x$
x
$f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \approx f(x_0+\Delta x)$


Marktdiagramm
p
Preis
D
S
$\tilde{S}$
lineare Approximation des tatsächlichen Modells.
p^*
$\tilde{D}$
q^*
q
Menge

Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel: $f(x) = \ln(1+x)$



$\overbrace{\ln(1+x)}^{f(x)} \approx \underbrace{\overbrace{\ln(1+x_0)}^{f(x_0)}}_{=\ln(1)=0 \text{ für } x_0=0} + \overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{1+x_0}}_{\frac{1}{1}=1 \text{ für } x_0=0}\underbrace{(x-x_0)}_{=x-0=x \text{ für } x_0=0}}^{f'(x_0)(x-x_0)}$ für x nahe x_0.

Mit $x_0 = 0$ gilt: $\ln(1+x) \approx x$.

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}^{\text{Lineare Approximation}} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von** f bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$%.

Relative Veränderungen

x: $$\frac{\overset{\text{neu}}{x_2} - \overset{\text{alt}}{x_1}}{x_1}$$: Veränderungsrate

$f(x)$: $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$$: Veränderungsrate

Elastizität : $$\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)}}{\frac{x_2-x_1}{x_1}} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\boxed{f(x_1)}} \cdot \frac{x_1}{\boxed{x_2-x_1}}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1)}$$

$$\xrightarrow[x_2 \to x_1]{} f'(x_1) \cdot \frac{x_1}{f(x_1)} = El_x f(x)$$

Beispiel $\quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\boxed{\frac{1}{2}}}$

$$El_x f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \frac{x}{x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von** f bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$%.

Betrachte hierzu die relative Änderungsrate

$$\frac{\text{\%-Änderung } f(x)}{\text{\%-Änderung } x} = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{x}{f(x)} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \frac{df}{dx} \frac{x}{f(x)} = El_x f(x)$$

Input-Elastizität von Produktionsfunktionen

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0, 1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

$$El_x f(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

Input-Elastizität von Produktionsfunktionen

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0, 1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

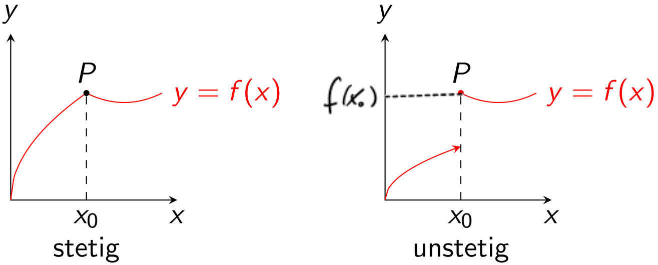
$$El_x f(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = Arx^{r-1}\frac{x}{Ax^r} = r$$

Steigt die Inputmenge um 1%, steigt die Outputmenge um r%.

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g, falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0.

(c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0, falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

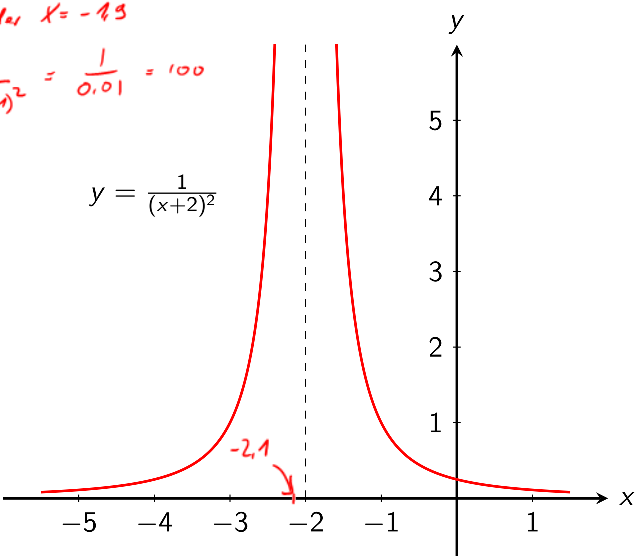
7.9 Mehr über Grenzwerte

Fehlender Grenzwert: $f(x) \xrightarrow[x \to -2]{} \infty$

$\left(\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty\right)$

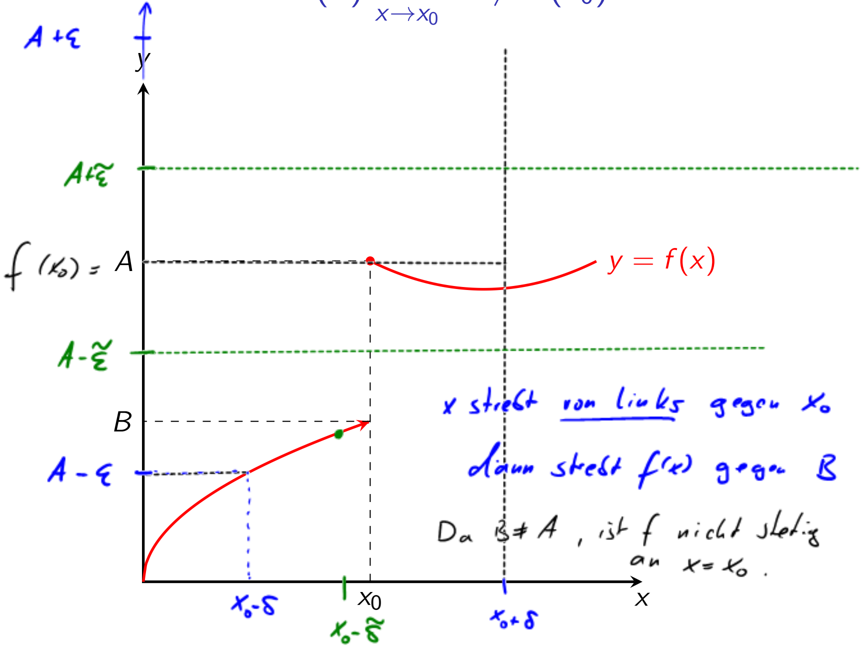
$x = -2{,}1$ oder $x = -1{,}9$

$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(\pm 0{,}1)^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$



$x = -2$: **vertikale Asymptote**

Fehlender Grenzwert: $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} B \neq f(x_0)$



x strebt <u>von links</u> gegen x_0

dann strebt $f(x)$ gegen B

Da $B \neq A$, ist f nicht stetig an $x = x_0$.

Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B, wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A, wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

von links

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

von rechts

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} A$$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0{,}5$

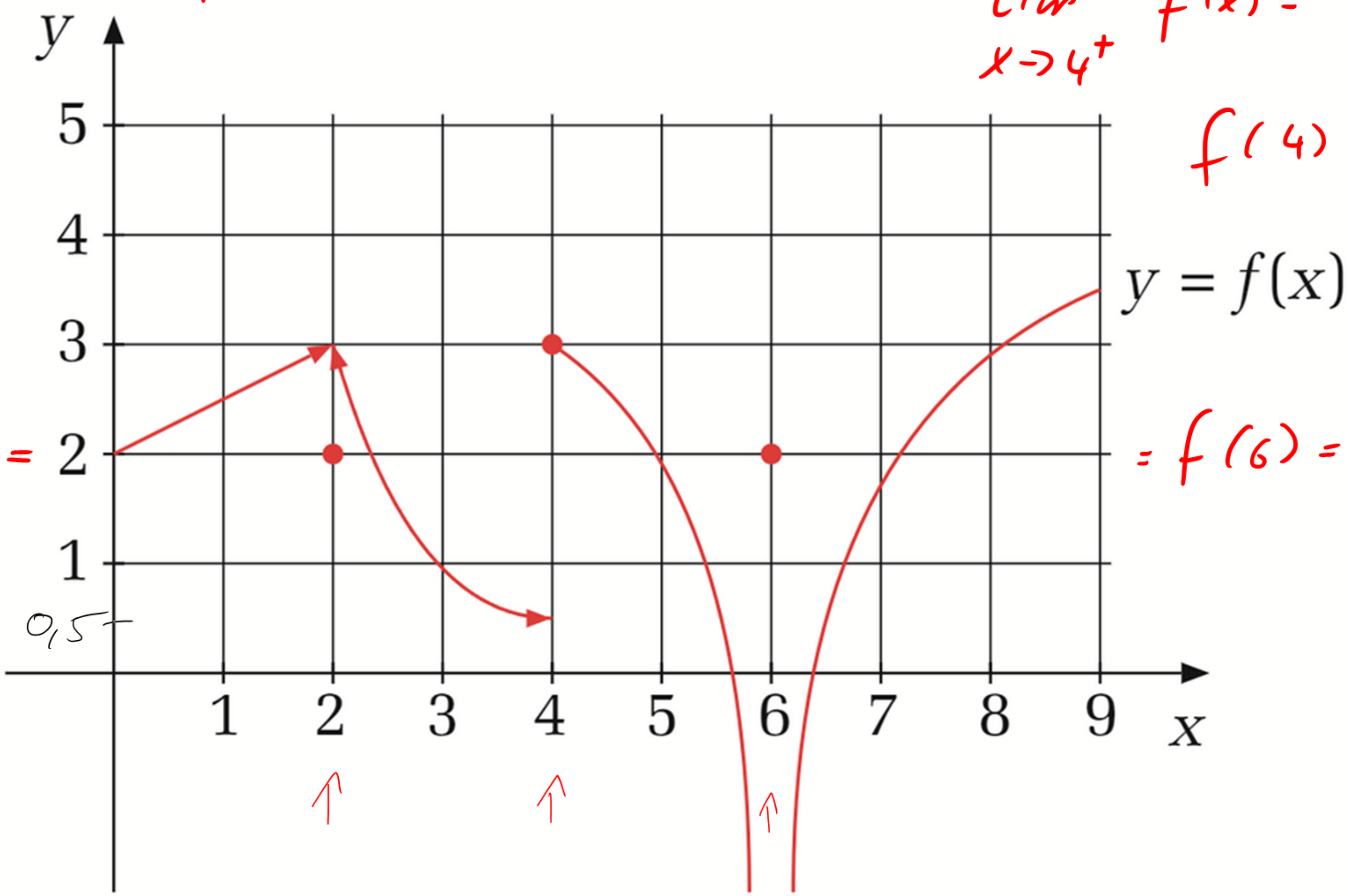
aber: $f(2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$

$f(4) = 3$

$\Rightarrow$ rechtsseitig stetig an der Stelle $x = 4$

$f(2) = 2$



$= f(6) = 2$

$\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = -\infty$

Abbildung 7.9.3: Eine Funktion, definiert auf [0, 9]

Einseitige Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A, wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

Notation:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} A$$

$f(x)$ hat den Grenzwert B, wenn x gegen minus unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an B gewählt werden, indem man x hinreichend klein wählt.

Notation:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} B$$

Beispiel 7.9.5

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen, wenn $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ (b) $g(x) = \dfrac{(1 - x^5)}{(x^4 + x + 1)}$ $\begin{matrix} : x^4 \\ : x^4 \end{matrix}$ $= \dfrac{\frac{1}{x^4} - x}{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}$

$$f(x) = \frac{(3x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{x^2} \\ \cdot \frac{1}{x^2} \end{matrix} = \frac{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{3 + 0 - 0}{1 + 0} = 3$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

$$\xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{0 - \infty}{1 + 0 + 0} = -\infty$$

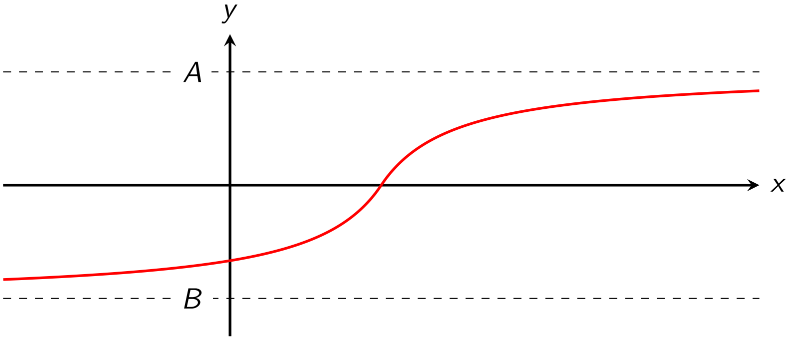
$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

$$\frac{1 - x^5}{x^4 + x + 1} \begin{matrix} : x^5 \\ : x^5 \end{matrix} = \frac{\frac{1}{x^5} - 1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}}$$

$$\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

$$\frac{1}{x^4} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x) = B$$

Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Wenn $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$, wenn $x \to x_0$, dann gilt:

$$f(x) + g(x) \to \infty \text{ und } f(x)g(x) \to \infty, \text{ wenn } x \to x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \to x_0$.

Beispiel 7.9.6

Gegeben seien $f(x) = 1/x^2$ und $g(x) = 1/x^4$. Wenn $x \to 0$, dann gilt $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$. Untersuchen Sie den Grenzwert für $x \to 0$ für jeden der folgenden vier Ausdrücke:

$$f(x) - g(x)\,, \qquad g(x) - f(x)\,, \qquad \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4} = \frac{x^2-1}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \text{"}\frac{-1}{0}\text{"} = -\infty$$

$$x^2 - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

$$x^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

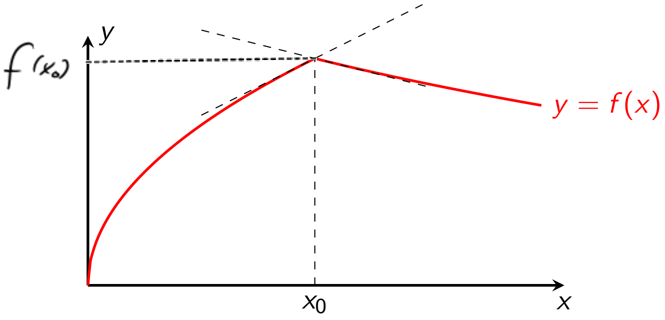
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$$

$$g(x) - f(x) = \dots = \frac{1-x^2}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{x^4}{x^2}}{\frac{x^4}{x^4}} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.



Es gilt zwar

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \ ,$$

aber <u>nicht</u>

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

Betrachte

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x$$

für ein beliebiges $\Delta x \neq 0$.

Dann gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Wegen $f(x_0 + \Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x_0)$ ist f stetig.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Die $\epsilon - \delta$ Definition des Grenzwertes

Wir sagen, dass $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert A hat,

wenn für jede Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert,

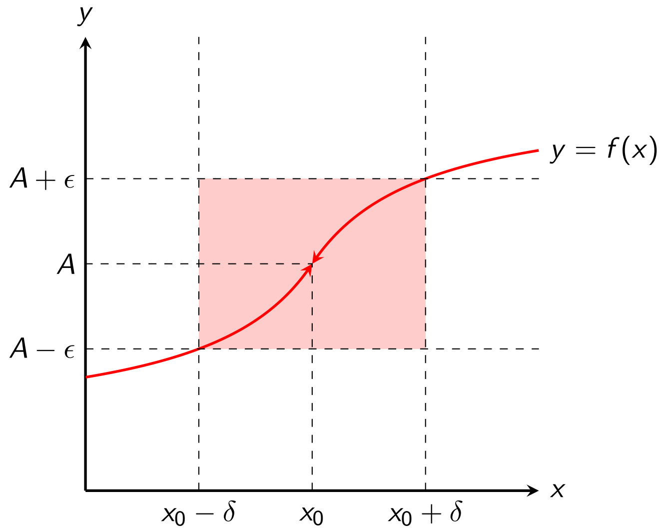
so dass $f(x)$ nicht weiter als ϵ entfernt ist von A für alle x, die nicht weiter als δ entfernt sind von x_0.

Wenn dies gilt, schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

und sagen auch, dass $f(x)$ gegen A strebt, wenn x gegen x_0 strebt.

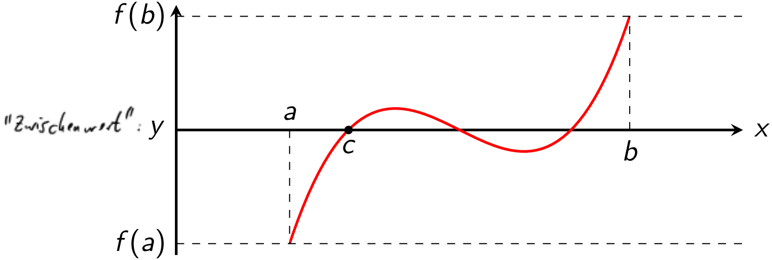
Die $\epsilon - \delta$ Stetigkeit



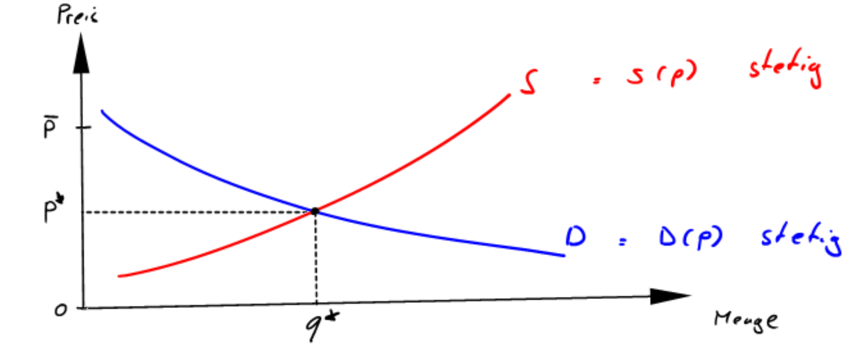
7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



Anwendung Zwischenwertsatz: Marktgleichgewicht



$D(0) > S(0)$

$D(\bar{p}) < S(\bar{p})$

Überschussnachfrage $Z(p) = D(p) - S(p)$, $Z(0) > 0$, $Z(\bar{p}) < 0$

Zwischenwertsatz: Es gibt einen Preis p^* sodass $Z(p^*) = 0$.

$$\Leftrightarrow D(p^*) = S(p^*)$$

Beispiel 7.10.3

Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, während a eine positive reelle Zahl ist. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^n = a$ eine eindeutige Lösung x^* zwischen 1 und a hat.

$x^n = a \iff \sqrt[n]{a} = x$

x^n ist stetig in x

Fall $a < 1$

$[a, 1]$

Fall $a > 1$

$[1, a]$

7.11 Unendliche Folgen

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl $s(n)$ zuordnet:

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Die Funktionswerte werden gewöhnlich mit Indizes bezeichnet:

$$s(1) = s_1,\ s(2) = s_2,\ \ldots\ ,\ s(n) = s_n,\ \ldots$$

Die Menge aller Funktionswerte der Folge bezeichnet man mit

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ oder auch mit } \{s_n\}\ .$$

Oft wird diese Menge selbst auch Folge genannt.

Beispiel: $s(n) = \frac{1}{n}$

$$s_1 = 1,\ s_2 = \frac{1}{2},\ s_3 = \frac{1}{3},\ \ldots\ ,\ s_n = \frac{1}{n}\ ,\ \ldots$$

Konvergenz von Folgen

Eine Folge $\{s_n\}$ **konvergiert** gegen eine Zahl s, wenn s_n beliebig nahe an s gewählt werden kann, indem man n hinreichend groß wählt.

Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad \text{oder} \qquad s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \ .$$

Eine Folge, die nicht gegen eine reelle Zahl konvergiert, **divergiert**.

Da eine Folge eine Funktion ist, können wir alle Regeln für Grenzwerte von Funktionen auch für Grenzwerte von Folgen anwenden.

7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $g(x_0) = 0$ für $x_0 \in D$.

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \; ?$$

Problem: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Lösung: f, g differenzierbar an der Stelle x_0

$g'(x_0) \neq 0$

für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x) - f(x_0)) : (x - x_0)}{(g(x) - g(x_0)) : (x - x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel: Durchschnittskosten

Betrachtet sei eine Kostenfunktion

$$C(q) = F + C_v(q)$$

für $q \geq 0$, wobei $F = C(0) > 0$ die Fixkosten bezeichnet und $C_v(q)$ mit $C_v(0) = 0$ die variablen Kosten.

Für $q > 0$ seien die Durchschnittskosten durch

$$A(q) = C(q)/q$$

definiert und die durchschnittlichen variablen Kosten seien durch

$$A_v(q) = C_v(q)/q$$

definiert.

Es gilt $A(q) \underset{q \to 0^+}{\longrightarrow} \infty$ aber $A_v(q) \underset{q \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{C_v(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (?!)

Regel von L'Hôpital

Schreibe für $x \neq x_0$ und $f(x_0) = g(x_0) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}{(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)}$$

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}{(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel Durchschnittskosten:

$$\lim_{q \to 0^+} \frac{C_v(q)}{q} = \frac{C_v'(0)}{1} = C_v'(0) \ \left(= C'(0)\right)$$

Beispiel $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ $\quad f(x),\ g(x)$

$f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$g(0) = 0$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$g'(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Zusammenfassung

- Implizites Differenzieren
- Ableitung der Inversen
- Approximation
- Elastizitäten
- Stetigkeit
- Zwischenwertsatz
- L'Hôpital
- ε-δ-Definition