Vorlesung zu Kapitel 06:[1]

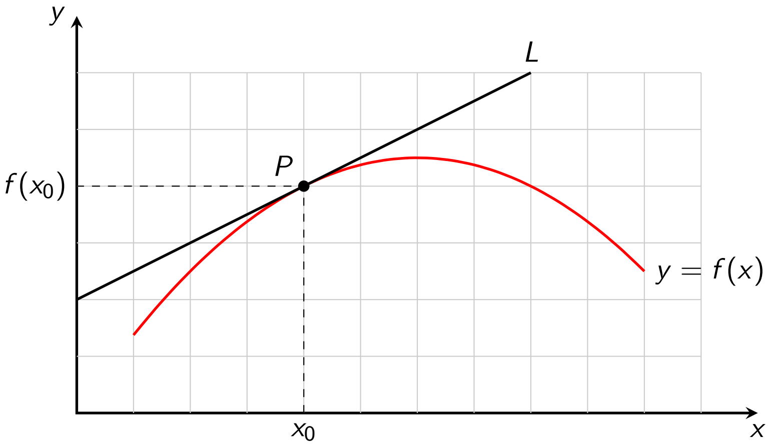
Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

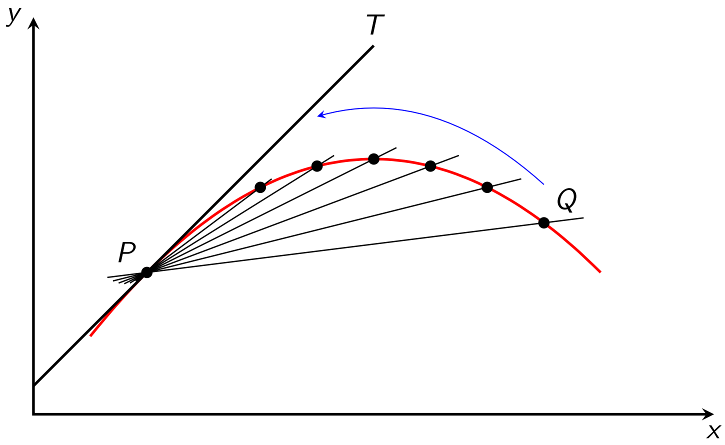
[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

6.1 Steigungen von Kurven



Die Steigung der Tangente L an den Graphen in P heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0, wir bezeichnen diese Zahl mit $f'(x_0)$.

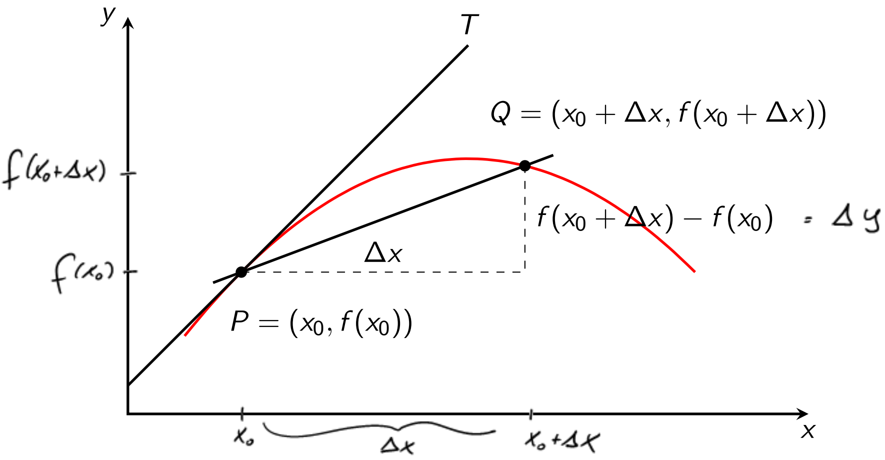
6.2 Tangenten und Ableitungen: Geometrische Idee



Steigung der Tangente T:

Grenzwert der Steigung der Sekante $\overline{PQ}$ wenn sich Q auf dem Graphen zu P bewegt.

Newton-Quotient / Differenzen-Quotient



Steigung von $\overline{PQ}$: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Definition: Ableitung

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0, die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Der Ausdruck $\lim_{\Delta x \to 0}$ bedeutet „**Grenzwert für Δx gegen null**“.

Wir werden diesen Grenzwert später genauer definieren.

Die Funktion f besitzt nur dann eine Ableitung, bzw. ist nur dann **differenzierbar**, falls dieser Grenzwert existiert.

Definition der Tangente

Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Begründung:

für $x \neq x_0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad | \cdot (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x)}_{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad | + f(x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Achsenabschnitt y-Achse

Steigung

$$= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + f'(x_0) \cdot x$$

Beispiel: $f(x) = x^2 \to$ Berechnung von $f'(x_0)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Berechne:

$$f(x_0 + \Delta x) = (\overset{a}{x_0} + \overset{b}{\Delta x})^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

$f(x_0) = x_0^2$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x_0^2}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \Delta x$$

Ersetze Δx durch 0.

Ableitung von f:

$$f'(x_0) = 2x_0$$

Geradengleichung der Tangente:

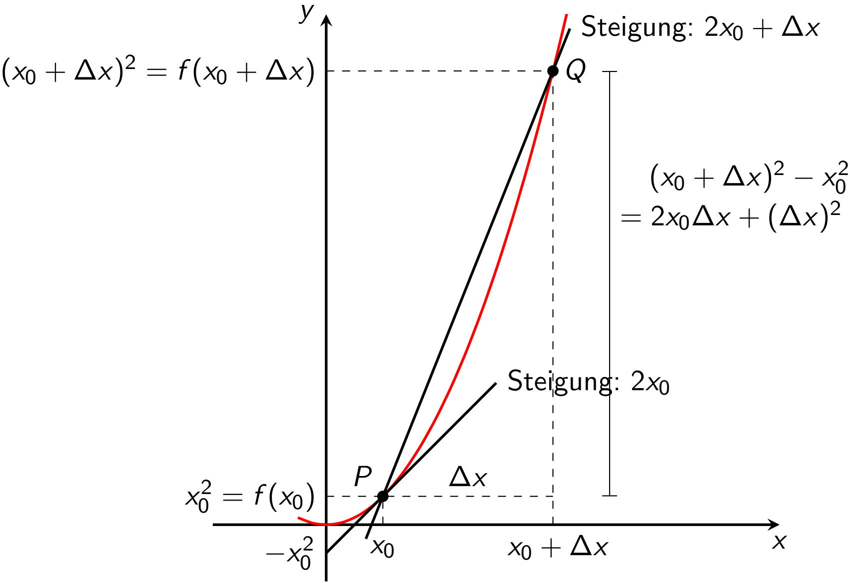
$y = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 + f'(x_0)\cdot x$

Achsenabschnitt

Steigung

$$y = x_0^2 - 2x_0^2 + 2x_0 \cdot x = -x_0^2 + 2x_0 \cdot x$$

Beispiel $f(x) = x^2$



Berechnung der Ableitung

(i) Addiere $\Delta x \neq 0$ zu x_0 und berechne $f(x_0 + \Delta x)$.

(ii) Berechne die zugehörige Änderung im Funktionswert:
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. $= \Delta y$

(iii) Bilde für $\Delta x \neq 0$ den Differenzen-Quotienten.

(iv) Vereinfache den Bruch aus Schritt (iii) so weit wie möglich.

(v) Dann ist $f'(x_0)$ diejenige Zahl, gegen die der Differenzen-Quotient strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

Beispiel: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

Wie lautet die Geradengleichung der Tangente?

(i) : $f(x_0 + \Delta x) = -\frac{(x_0 + \Delta x)^2}{2} + 2(x_0 + \Delta x)$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_0 + \Delta x\right)^2 + 2(x_0 + \Delta x)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) + 2x_0 + 2\Delta x$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot x_0^2 - x_0\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 2x_0 + 2\Delta x$$

$f(x_0) = -\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0$

(ii) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$= -\frac{1}{2}x_0^2 - x_0\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 2x_0 + 2\Delta x - \left(-\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0\right)$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}x_0^2} - x_0\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \cancel{2x_0} + 2\Delta x + \cancel{\frac{1}{2}x_0^2} - \cancel{2x_0}$$

$$= -x_0\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 2\Delta x$$

$$= \Delta x\left(-x_0 - \frac{1}{2}\Delta x + 2\right)$$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\left(-x_0 - \frac{1}{2}\Delta x + 2\right)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= 2 - x_0 - \frac{1}{2}\Delta x$$

(iv) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2 - x_0 = f'(x_0)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \qquad f'(x) = -x + 2$$

Geradengleichung der Tangente

$$y = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 + f'(x_0)\cdot x$$

$$= -\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0 + (x_0 - 2)x_0 + (-x_0 + 2)x$$

$$= -\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0 + x_0^2 - 2x_0 + (2 - x_0)x$$

$$= \frac{1}{2}x_0^2 + (2 - x_0)x$$

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

Ist $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ monoton wachsend oder fallend?

Jeweils in welchem Bereich?

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

x_1, x_2 mit $x_2 > x_1$

$$f(x_2) - f(x_1) = -\frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - \left(-\frac{x_1^2}{2} + 2x_1\right)$$

$$= -\frac{x_2^2}{2} + 2x_2 + \frac{x_1^2}{2} - 2x_1$$

$$= -\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + 2x_2 - 2x_1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\overset{a^2}{x_2^2} - \overset{b^2}{x_1^2}\right) + 2(\overset{a}{x_2} - \overset{b}{x_1})$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + 2(x_2 - x_1)$$

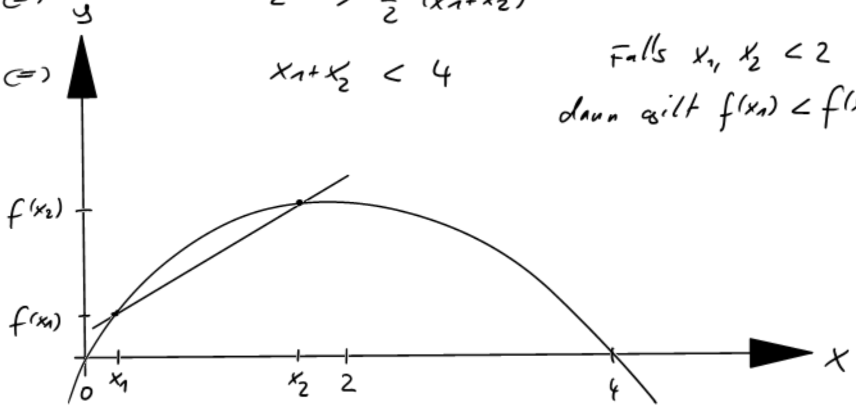
$$= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}\left[-\frac{1}{2}(x_2 + x_1) + 2\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 > \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 < 4$$

Falls $x_1, x_2 < 2$
dann gilt $f(x_1) < f(x_2)$



Vorzeichen der Ableitung?

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x \qquad f'(x) = -x+2$$

$$f'(x) > 0 \iff -x+2 > 0 \iff 2 > x$$

Monotonie und Vorzeichen der Ableitung

Sei f eine Funktion mit der Ableitung f'.

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \;\Leftrightarrow\; f$ monoton wachsend
- $f'(x) > 0$ für alle $x \;\Rightarrow\; f$ strikt monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \;\Leftrightarrow\; f$ monoton fallend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \;\Rightarrow\; f$ strikt monoton fallend
- $f'(x) = 0$ für alle $x \;\Leftrightarrow\; f$ konstant

Beispiel $f(x) = x^3$ $\qquad f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$

6.4 Ökonomische Anwendungen

Durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x_0 bis $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Änderungsrate von f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Relative Änderungsrate von f an der Stelle x_0:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{1}{f(x_0)}$$

Beispiel 6.4.4: Grenzkosten

Sei mit C die monoton wachsende und differenzierbare Kostenfunktion bezeichnet.

Grenzkosten an der Stelle x:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls $|\Delta x|$ sehr klein im Vergleich zu x:

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls x sehr groß und $\Delta x = 1$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

Sei f eine Funktion.

Der Ausdruck

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

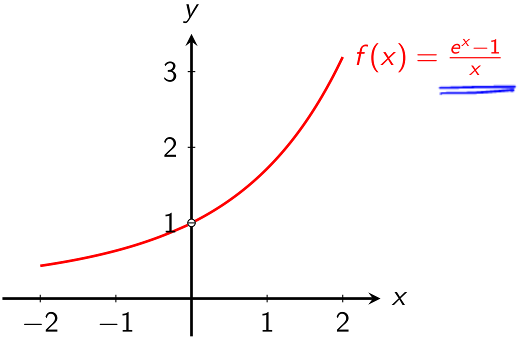
heißt **Grenzwert** von f für x gegen x_0.

Er bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x nah genug an x_0, aber nicht notwendig gleich x_0.

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$

$f(0) = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

nicht definiert



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000

x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1.718	1.052	1.001	1.000

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Regeln für Grenzwerte

Es seien f und g zwei Funktionen.

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existieren, dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)^r) = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^r$, für $r \in \mathbb{R}$

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0:

$$f(x) = A \text{ für alle } x \Rightarrow f'(x) = 0$$

Additive Konstanten verschwinden beim Ableiten:

$$(A + f(x))' = f'(x)$$

Multiplikative Konstanten bleiben erhalten:

$$(Af(x))' = Af'(x)$$

Für eine beliebige reelle Konstante r gilt:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

z.B. $(x^2)' = 2x \qquad (x^3)' = 3x^2$

$$\underline{f(x) = A \quad \text{für alle } x}$$

$\Delta x \to 0$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{A - A}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\underline{g(x) = f(x) + A}$$

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) + A - (f(x) + A)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) \cancel{+A} - f(x) \cancel{-A}}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = f'(x)$$

$$\underline{g(x) = A \cdot f(x)}$$

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{A \cdot f(x+\Delta x) - A f(x)}{\Delta x} = A \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = A \cdot f'(x)$$

Ableitung der Wurzel

Wie lautet der Differenzenquotient für $f(x) = \sqrt{x}$?

Benutze die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ um den Differenzenquotienten zu vereinfachen!

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(\overset{a}{\sqrt{x+\Delta x}} - \overset{b}{\sqrt{x}}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\left(\overset{a}{\sqrt{x+\Delta x}} \overset{+}{+} \overset{b}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{\cancel{x} + \Delta x}^{a^2} - \overbrace{\cancel{x}}^{b^2}}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

für $x > 0$ $\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$

6.7 Ableitungen von Summen und Differenzen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide in $x \in D$ differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Beispiel: Gewinn

Pause bis $11^{\underline{00}}$ Uhr

Es seien $R(x)$ der Erlös und $C(x)$ die Kosten einer Firma bei gegebener Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

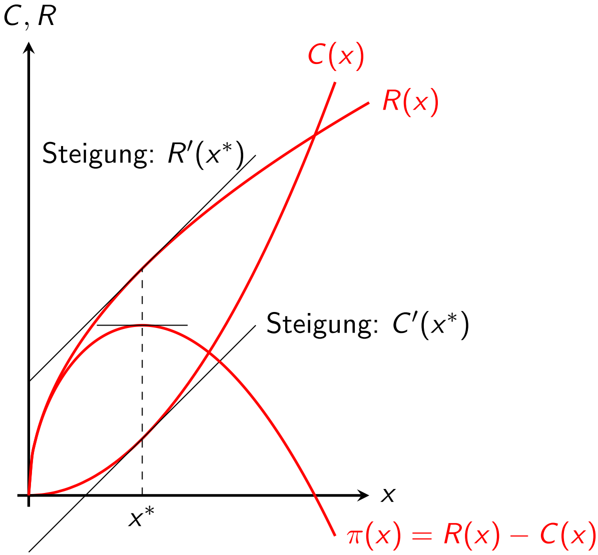
Der Gewinn der Firma sei definiert durch:

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

Der **Grenzgewinn** der Firma ist dann:

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Insbesondere ist der Grenzgewinn gleich null genau dann wenn der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht.



C, R
$C(x)$
$R(x)$
Steigung: $R'(x^*)$
Steigung: $C'(x^*)$
x
x^*
$\pi(x) = R(x) - C(x)$

6.7 Produktregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)\cdot \underline{g(x+\Delta x)} - f(x)\cdot \underline{g(x+\Delta x)} - \underline{f(x)}\cdot g(x) + \underline{f(x)}\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) g(x+\Delta x) + f(x)\left(-g(x) + g(x+\Delta x)\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

6.7 Quotientenregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Wenn $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar in x und es gilt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beispiel: Durchschnittskosten

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

Es seien $C(x)$ die Gesamtkosten einer Firma bei Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

Für $x > 0$ seien $C(x)/x$ die Durchschnittskosten der Firma.

Zu Berechnen: $f'(x) = C'(x)$ $\quad g'(x) = 1$

$$\frac{d}{dx}(\overbrace{C(x)}^{f}/\overbrace{x}^{g}) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(C'(x) \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{C(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right)$$

6.8 Kettenregel

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

äußere Funktion

innere Funktion

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch die Verkettung $f \circ g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Ableitung d. äußeren Funktion}}\underbrace{g'(x)}_{\text{Ableitung der inneren Funktion}}$$

$$\frac{\big(f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\big)}{\Delta x} \cdot \frac{\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}$$

$$= \frac{\big(f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\big) \cdot \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\Delta x \cdot \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}$$

$$= \frac{\big(f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\big) \cdot \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) \cdot \Delta x}$$

$$= \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel: optimale Konsumentscheidung

Die Konsumentscheidung $x \geq 0$ für ein Gut hänge vom verfügbaren Einkommen $m \geq 0$ ab

äußere Funktion

$$\rightarrow \text{ Funktion } x(m)$$

Das verfügbare Einkommen $m \geq 0$ hänge vom Lohnsatz $\omega \geq 0$ ab

innere Funktion

$$\rightarrow \text{ Funktion } m(\omega)$$

Dies ergibt die verkettete Funktion $x(m(\omega))$.

Mit der Kettenregel können wir berechnen, wie sich der Konsum x ändert, falls sich der Lohnsatz ω ändert:

$$(x(m(\omega)))' = x'(m) \cdot m'(\omega)$$

äußere Ableitung

innere Ableitung

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

alternativ $\frac{df(x)}{dx}$

Die Ableitung f' wird auch **erste Ableitung** genannt.

Wird die Ableitungsfunktion f' erneut abgeleitet, heißt das Resultat **zweite Ableitung**: $f'' = (f')'$.

$f''(x)$ ist dann die zweite Ableitung an der Stelle x.

Alternative Notation:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$$

Dritte und höhere Ableitungen

Dritte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y''' = f'''(x)$$

Vierte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

***n*-te Ableitung**

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

6.10 Exponentialfunktion

(*) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \approx 2.71828^x \ , x \in \mathbb{R}$$

Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \overset{(*)}{=} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \boxed{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}$$

Wir hatten zuvor argumentiert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Überblick: Natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = exp(x) = e^x \qquad\qquad (e = 2.71828\ldots)$$

ist differenzierbar und strikt monoton wachsend.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

Die folgenden Eigenschaften gelten für alle Exponenten s und t:

$$(a)\ e^s e^t = e^{s+t} \qquad (b)\ e^s/e^t = e^{s-t} \qquad (c)\ (e^s)^t = e^{st}$$

Ferner gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

6.11 Logarithmusfunktion - Ableitung

Wir leiten beide Seiten der Gleichung

$$\underline{\underline{e^{\ln(y)} = y}}$$

nach y ab.

Ableiung linke Seite: Kettenregel

- innere Funktion: $g(y) = \ln(y) \Rightarrow g'(y) = \ln'(y)$.
- äußere Funktion: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Anwendung der Kettenregel auf der linken Seite ergibt:

$$\left(e^{\ln(y)}\right)' = e^{\ln(y)} \cdot \ln'(y)$$

Die Ableitung der rechten Seite der Gleichung lautet $(y)' = 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\ln(y)}}_{=y} \cdot \ln'(y) = 1 \Leftrightarrow \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{e^{\ln(y)}} = y$$

innere Funktion

äußere Funktion

Ableitung der linken Seite: Kettenregel

$$\underbrace{\underbrace{e^{\ln(y)}}_{\text{äußere Ableitung}}}_{=y} \cdot \underbrace{\ln(y)'}_{\text{innere Ableitung}} = 1$$

Ableitung von y

$$y \cdot \ln(y)' = 1 \qquad | : y \quad (\text{für } y > 0)$$

$$\ln(y)' = \frac{1}{y}$$

Zusammenfassung

- Differenzen-Quotient
- Monotonie
- Grenzwerte
- Ableitungsregeln
- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion