Vorlesung zu Kapitel 06:[1]

Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

6.1 Steigungen von Kurven

6.2 Tangenten und Ableitungen

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

6.4 Ökonomische Anwendungen

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

6.7 Summen, Produkte und Quotienten

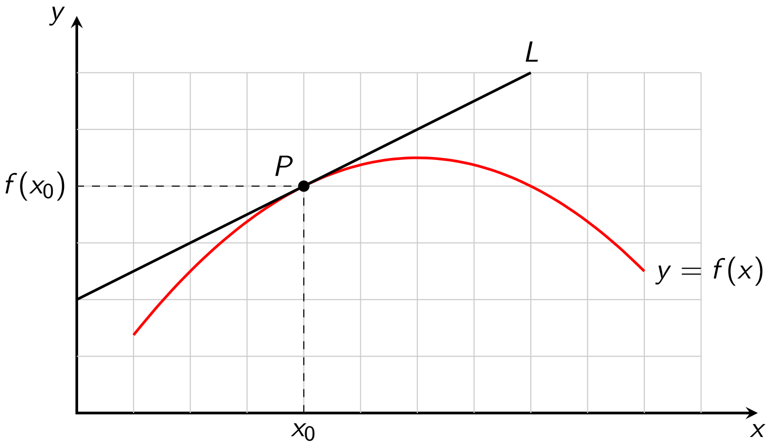
6.8 Kettenregel

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

6.10 Exponentialfunktion

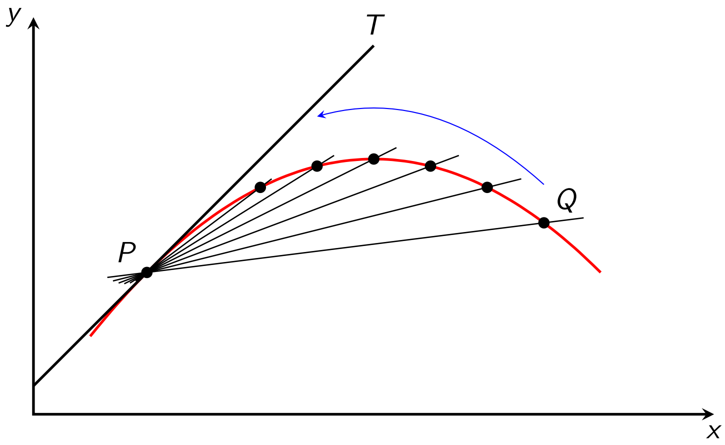
6.11 Logarithmusfunktion

6.1 Steigungen von Kurven



Die Steigung der Tangente L an den Graphen in P heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0, wir bezeichnen diese Zahl mit $f'(x_0)$.

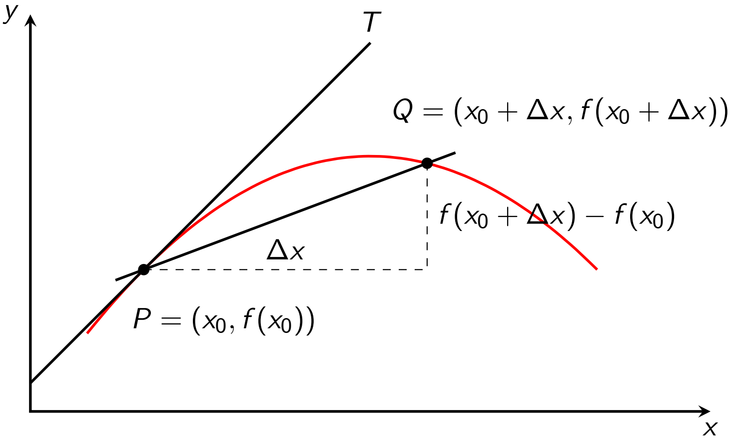
6.2 Tangenten und Ableitungen: Geometrische Idee



Steigung der Tangente T:

Grenzwert der Steigung der Sekante $\overline{PQ}$ wenn sich Q auf dem Graphen zu P bewegt.

Newton-Quotient / Differenzen-Quotient



Steigung von $\overline{PQ}$: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Definition: Ableitung

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0, die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definition der Tangente

Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

Berechne:

$f(x_0 + \Delta x) =$

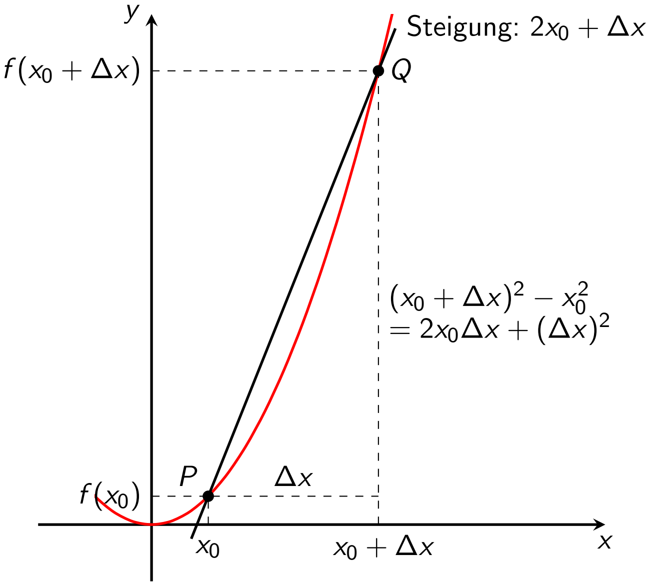
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$

Ersetze Δx durch 0.

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

Beispiel $f(x) = x^2$



Berechnung der Ableitung

(i) Addiere $\Delta x \neq 0$ zu x_0 und berechne $f(x_0 + \Delta x)$.

(ii) Berechne die zugehörige Änderung im Funktionswert: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

(iii) Bilde für $\Delta x \neq 0$ den Differenzen-Quotienten.

(iv) Vereinfache den Bruch aus Schritt (iii) so weit wie möglich.

(v) Dann ist $f'(x_0)$ diejenige Zahl, gegen die der Differenzen-Quotient strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

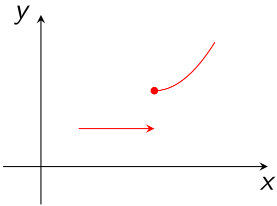
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

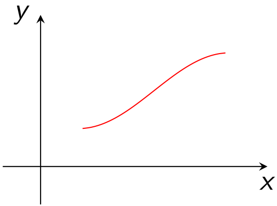
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann ist f **monoton wachsend** auf I
- $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton wachsend** auf I
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann ist f **monoton fallend** auf I
- $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton fallend** auf I

Beispiele

monoton wachsend

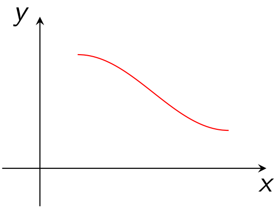


streng monoton wachsend



monoton fallend

streng monoton fallend



Monotonie und Vorzeichen der Ableitung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sei und $f'(x)$ für alle $x \in I$ definiert sei.

- $f'(x) \geq 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I.
- $f'(x) > 0 \; \forall \; x \; \in I \Rightarrow f$ ist strikt monoton wachsend auf I.
- $f'(x) \leq 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I.
- $f'(x) < 0 \; \forall \; x \; \in I \Rightarrow f$ ist strikt monoton fallend auf I.
- $f'(x) = 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist konstant auf I.

6.4 Ökonomische Anwendungen

Durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x_0 bis $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Änderungsrate von f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Relative Änderungsrate von f an der Stelle x_0:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{1}{f(x_0)}$$

Beispiel 6.4.4: Grenzkosten

Sei mit $C : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ die monoton wachsende und differenzierbare Kostenfunktion bezeichnet.

Grenzkosten an der Stelle x:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls $|\Delta x|$ sehr klein im Vergleich zu x:

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls x sehr groß und $\Delta x = 1$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

Bedeutung Grenzwert:

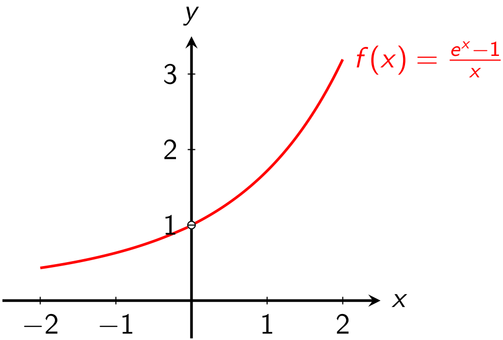
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Der Ausdruck

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

heißt **Grenzwert**. Er bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x hinreichend nah, aber nicht gleich x_0.

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000

x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1.718	1.052	1.001	1.000

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Regeln für Grenzwerte

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ ist, dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^r = A^r$, für $r \in \mathbb{R}$ und falls A^r definiert ist

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0:

$$f(x) \equiv A \Rightarrow f'(x) = 0$$

Wenn man Ableitungen bildet, verschwinden additive Konstanten, während multiplikative Konstanten erhalten bleiben:

$$y = A + f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$y = Af(x) \Rightarrow y' = Af'(x)$$

Für eine beliebige reelle Konstante r gilt:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

6.7 Ableitungen von Summen und Differenzen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide in $x \in D$ differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Beispiel: Profit

Es seien $R(x)$ der Erlös und $C(x)$ die Kosten einer Firma bei gegebener Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

Der Profit der Firma sei definiert durch:

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

Der **Grenzgewinn** der Firma ist dann:

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Insbesondere ist der Grenzgewinn gleich null genau dann wenn der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht.

6.7 Die Ableitung eines Produktes

Produktregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide im Punkt $x \in D$ differenzierbar sind, dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ im Punkt x differenzierbar und

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6.7 Die Ableitung eines Quotienten

Quotientenregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g in x differenzierbar sind und $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar in x und

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beispiel: Durchschnittskosten

Es seien $C(x)$ die Gesamtkosten einer Firma bei Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

Für $x > 0$ seien $C(x)/x$ die Durchschnittskosten der Firma.

Zu Berechnen:

$$\frac{d}{dx}\left(C(x)/x\right) =$$

6.8 Die Kettenregel

Wenn g differenzierbar ist in x_0 und f differenzierbar ist in $u_0 = g(x_0)$, dann ist $f(g(x))$ differenzierbar in x_0 und

$$(f(g(x_0)))' = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Beispiel: optimale Konsumentscheidung

Die Konsumentscheidung $x \geq 0$ für ein Gut hänge vom verfügbaren Einkommen $m \geq 0$ ab:

$$x : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$$

Das verfügbare Einkommen $m \geq 0$ hänge vom Lohnsatz $\omega \geq 0$ ab:

$$m : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$$

Mit der Kettenregel können wir berechnen, wie sich der Konsum ändert, falls sich der Lohnsatz ändert:

$$(x(m(\omega)))' = \frac{d}{d\omega}\,(x(m(\omega))) = \frac{dx(m)}{dm} \cdot \frac{dm(\omega)}{d\omega} = x'(m) \cdot m'(\omega)$$

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung f' wird auch **erste Ableitung** genannt.

Wird die Ableitungsfunktion f' erneut abgeleitet, heißt das Resultat **zweite Ableitung**: $f'' = (f')'$.

$f''(x)$ ist dann die zweite Ableitung an der Stelle x.

Alternative Notation:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$$

Dritte und höhere Ableitungen

Dritte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y''' = f'''(x)$$

Vierte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

n-**te Ableitung**

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

6.10 Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \approx 2.71828^x \;, x \in \mathbb{R}$$

Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wir hatten zuvor argumentiert: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Überblick: Natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = exp(x) = e^x \qquad\qquad (e = 2.71828\ldots)$$

ist differenzierbar und strikt monoton wachsend.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

Die folgenden Eigenschaften gelten für alle Exponenten s und t:

$$(a)\ e^s e^t = e^{s+t} \qquad (b)\ e^s/e^t = e^{s-t} \qquad (c)\ (e^s)^t = e^{st}$$

Ferner gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Die allgemeine Exponentialfunktion

Sei $a > 0$. Dann ist die allgemeine Exponentialfunktion definiert durch

$$f(x) = a^x$$

Da der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist, gilt:

$$a = e^{\ln(a)}$$

Damit:

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)x}$$

Mit der Kettenregel:

$$f'(x) = \ln(a)e^{\ln(a)x} = \ln(a)a^x$$

6.11 Logarithmusfunktion

Natürliche Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion $g(y) = \ln(y)$ für $y > 0$ erfüllt

$$\ln(y) = x \text{ für } y = e^x \ ,$$

sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

Es gilt also auch

$$e^{\ln(y)} = y \ \forall \ y > 0$$

Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{de^{\ln(y)}}{dy} = e^{\ln(y)} \cdot \ln'(y) = 1 \Leftrightarrow \ln'(y) = 1/e^{\ln(y)} = 1/y$$

Überblick: Natürliche Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion

$$g(x) = \ln(x) \ , \ x > 0$$

ist differenzierbar und strikt monoton wachsend in $\mathbb{R}_>$.

Es gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Nach Definition gilt $e^{\ln(x)} = x \ \forall \ x \in \mathbb{R}_>$ und $\ln(e^x) = x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
Die folgenden Eigenschaften gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}_>$ und $p \in \mathbb{R}$:

$$(a)\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (b)\ \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y) \quad (c)\ \ln(x^p) = p\ln(x)$$

Ferner gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty \qquad \ln(1) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

Zusammenfassung

- Differenzen-Quotient
- Monotonie
- Grenzwerte
- Ableitungsregeln
- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion