Vorlesung zu Kapitel 06:[1]

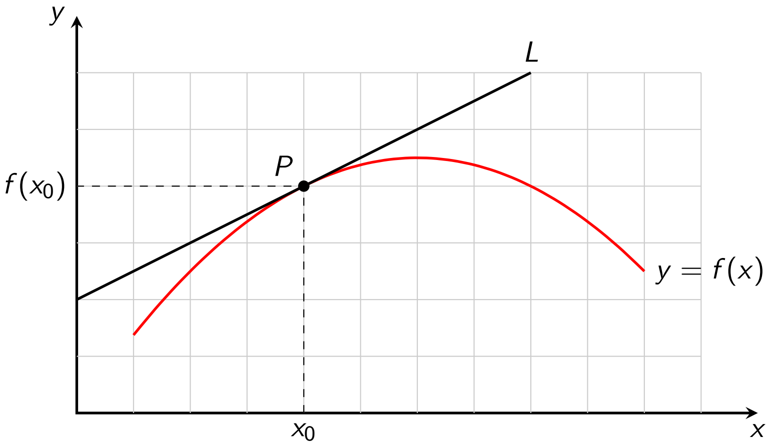
Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

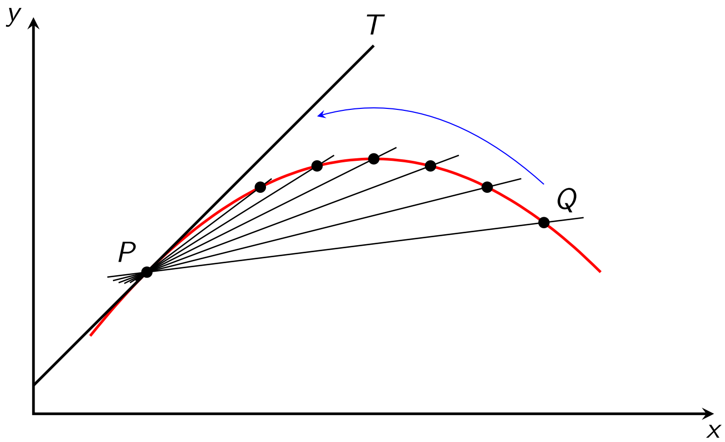
[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

6.1 Steigungen von Kurven



Die Steigung der Tangente L an den Graphen in P heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0, wir bezeichnen diese Zahl mit $f'(x_0)$.

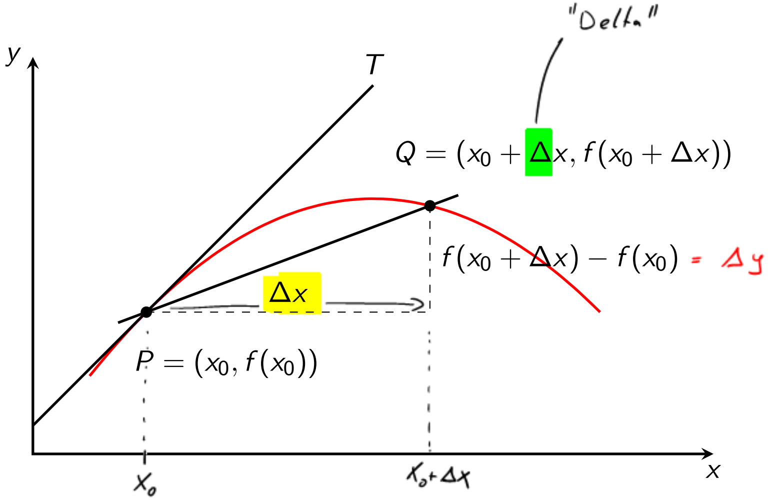
6.2 Tangenten und Ableitungen: Geometrische Idee



Steigung der Tangente T:

Grenzwert der Steigung der Sekante $\overline{PQ}$ wenn sich Q auf dem Graphen zu P bewegt.

Newton-Quotient / Differenzen-Quotient



Steigung von $\overline{PQ}$: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Definition: Ableitung

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0, die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{Zahl}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

feste Zahl

Definition der Tangente

Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

variable Zahl

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

feste Zahlen

$$\Longleftrightarrow \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0)x_0 = \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{\text{Achsenabschnitt}} + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}\,x$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Berechne:

$$f(x_0 + \Delta x) = (\overset{a}{x_0} + \overset{b}{\Delta x})^2 = x_0^2 + 2\Delta x\, x_0 + (\Delta x)^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left(\cancel{x_0^2} + 2\Delta x\, x_0 + (\Delta x)^2\right) - \cancel{x_0^2} = \Delta y$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\cancel{\Delta x}\, x_0 + \Delta x \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \Delta x$$

Ersetze Δx durch 0.

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

$$f(x) = -x^3 + 5 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x_0 + \Delta x) = -(x_0+\Delta x)^3 + 5 = -x_0^3 - 3x_0^2\Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 5$$

$$-f(x_0) = +x_0^3 - 5$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \cancel{-x_0^3}\underbrace{-3x_0^2\Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}_{=\Delta y} \cancel{+5} \cancel{+x_0^3} \cancel{-5}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-3x_0^2\Delta x - 3x_0\,\Delta x\cdot\Delta x - \Delta x\cdot\Delta x\cdot\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

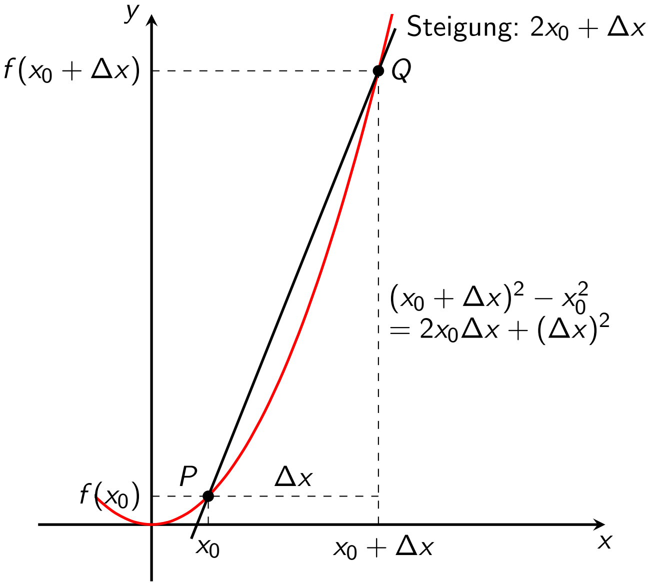
$$= \frac{(-3x_0^2 - 3x_0\Delta x - \Delta x\cdot\Delta x)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x_0) = -3x_0^2 - 3x_0\cdot 0 - 0\cdot 0$$

$$(\Delta x = 0)$$

$$= -3x_0^2$$

Beispiel $f(x) = x^2$



Berechnung der Ableitung

(i) Addiere $\Delta x \neq 0$ zu x_0 und berechne $f(x_0 + \Delta x)$.

(ii) Berechne die zugehörige Änderung im Funktionswert:
$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

(iii) Bilde für $\Delta x \neq 0$ den Differenzen-Quotienten.

(iv) Vereinfache den Bruch aus Schritt (iii) so weit wie möglich.

(v) Dann ist $f'(x_0)$ diejenige Zahl, gegen die der Differenzen-Quotient strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

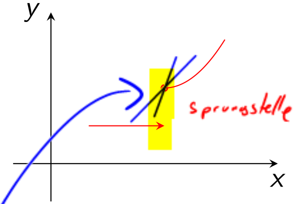
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

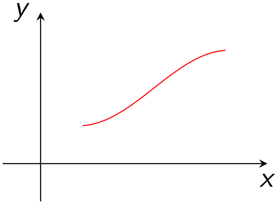
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann ist f **monoton wachsend** auf I
- $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton wachsend** auf I
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann ist f **monoton fallend** auf I
- $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton fallend** auf I

Beispiele

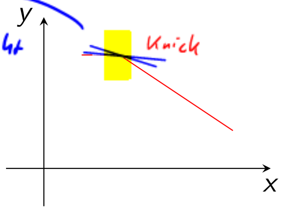
monoton wachsend



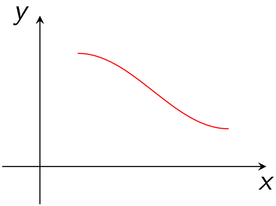
streng monoton wachsend



monoton fallend



streng monoton fallend



Tangenten nicht eindeutig bestimmt

→ keine Ableitung

Monotonie und Vorzeichen der Ableitung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sei und $f'(x)$ für alle $x \in I$ definiert sei.

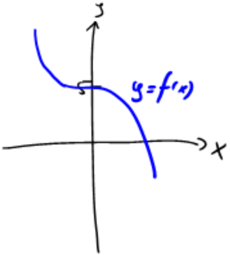
"für alle" "Element aus"

- $f'(x) \geq 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I.
- $f'(x) > 0 \; \forall \; x \; \in I \Rightarrow f$ ist strikt monoton wachsend auf I.
- $f'(x) \leq 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I.
- $f'(x) < 0 \; \forall \; x \; \in I \Rightarrow f$ ist strikt monoton fallend auf I.
- $f'(x) = 0 \; \forall \; x \; \in I \Leftrightarrow f$ ist konstant auf I.

Gegen-Beispiel

4. Spiegelstrich

$$f(x) = -x^3 + 5$$



- streng monoton fallend

$$f'(x_0) = -3x_0^2$$

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0$$

$$\not\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ für alle } x$$

6.4 Ökonomische Anwendungen

Durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x_0 bis $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Änderungsrate von f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Relative Änderungsrate von f an der Stelle x_0:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{1}{f(x_0)}$$

Beispiel 6.4.4: Grenzkosten

engl. Cost

Sei mit $C : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ die monoton wachsende und differenzierbare Kostenfunktion bezeichnet.

Grenzkosten an der Stelle x:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{C(x + \Delta x) - C(x)}^{\text{Kostenzuwachs}}}{\Delta x}$$

Falls $|\Delta x|$ sehr klein im Vergleich zu x:

"ungefähr gleich"

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls x sehr groß und $\Delta x = 1$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

Bedeutung Grenzwert:

feste Zahlen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

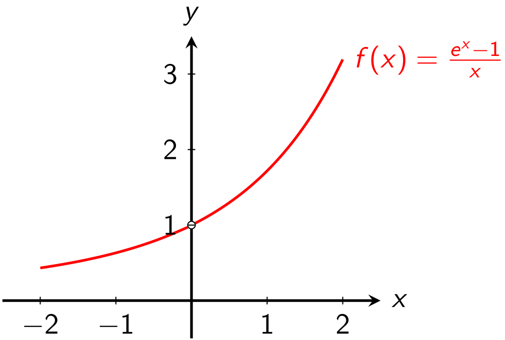
Der Ausdruck

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Variable

heißt **Grenzwert**. Er bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x hinreichend nah, aber nicht gleich x_0.

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000

x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1.718	1.052	1.001	1.000

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(e^x)' = \ ?$$

Funktionswert

$$\frac{\overbrace{e^{(x+\Delta x)}}^{\text{neuer}} - \overbrace{e^{x}}^{\text{alter}}}{\Delta x} =$$

$$\frac{a\cdot b}{c} = a\cdot\frac{b}{c}$$

$$\frac{a\cdot\cancel{k} + b\cdot\cancel{k}}{c\cdot\cancel{k}} = \frac{a+b}{c}$$

$f(\Delta x)$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} e^x \cdot 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

Regeln für Grenzwerte

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ ist, dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^r = A^r$, für $r \in \mathbb{R}$ und falls A^r definiert ist

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0:

$$f(x) \equiv A \Rightarrow f'(x) = 0$$

Wenn man Ableitungen bildet, verschwinden additive Konstanten, während multiplikative Konstanten erhalten bleiben:

$$y = A + f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$$

$$y = Af(x) \Rightarrow y' = Af'(x)$$

Für eine beliebige reelle Konstante r gilt:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

Bspe $(x^2)' = 2x$ $\qquad (-x^3+5)' = -3x^2$

$$\left(B + A \cdot f(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{B + A\, f(x+\Delta x) - \left(B + A\, f(x)\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{B} + A \cdot f(x+\Delta x) - \cancel{B} - A\, f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} A \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= A \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} = A \cdot f'(x)$$

6.7 Ableitungen von Summen und Differenzen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide in $x \in D$ differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Beispiel: Profit

Beispiel für Erlös

$R(x) = p \cdot x$

$R'(x) = p$

Es seien $R(x)$ der Erlös und $C(x)$ die Kosten einer Firma bei gegebener Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

Der Profit der Firma sei definiert durch:

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

Der **Grenzgewinn** der Firma ist dann:

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Insbesondere ist der Grenzgewinn gleich null genau dann wenn der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht.

6.7 Die Ableitung eines Produktes

Produktregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide im Punkt $x \in D$ differenzierbar sind, dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ im Punkt x differenzierbar und

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(f(x)\, g(x)\right)' \neq f'(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,\underline{g(x+\Delta x)} - f(x)\,\underline{g(x+\Delta x)} - \underline{f}(x)\,g(x) + \underline{f}(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)\underline{g(x+\Delta x)} + f(x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}\cdot \underbrace{g(x+\Delta x)} + f(x)\underbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}$$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6.7 Die Ableitung eines Quotienten

Quotientenregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g in x differenzierbar sind und $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar in x und

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel: Durchschnittskosten

Es seien $C(x)$ die Gesamtkosten einer Firma bei Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

Für $x > 0$ seien $C(x)/x$ die Durchschnittskosten der Firma.

$f(x) = C(x) \qquad f'(x) = C'(x)$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

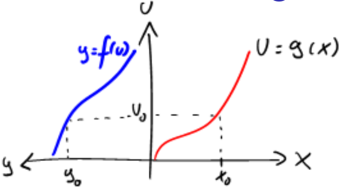
Zu Berechnen:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{C(x)}/\underline{x}\right) = \frac{C'(x)\,x - C(x)\,1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{C'(x)\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{C(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right)$$

6.8 Die Kettenregel



innere Funktion $g(x) = u$

äußere Funktion $f(u)$

Wenn g differenzierbar ist in x_0 und f differenzierbar ist in $u_0 = g(x_0)$, dann ist $f(g(x))$ differenzierbar in x_0 und

$$(f(g(x_0)))' = \underbrace{f'(u_0)}_{\text{äußere}}\underbrace{g'(x_0)}_{\text{innere}} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Ableitung

$$\left(f(g(x))\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

mit $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$

$$g(x+\Delta x) = \overbrace{g(x)}^{u} + \Delta u$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u) \cdot g'(x)$$

äußere innere

Ableitung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(x) \cdot g(x)^{-1}$$

Produktregel: $\left(f(x) \cdot g(x)^{-1}\right)' = f'(x) \cdot g(x)^{-1} + f(x) \cdot \overbrace{\left(g(x)^{-1}\right)'}^{?}$

$g(x)^{-1}$

innere Funktion: $g(x) = u$

äußere Funktion u^{-1}

innere Ableitung: $g'(x)$

äußere Ableitung: $\left(u^{-1}\right)' = -1 \cdot u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$

$$\left(g(x)^{-1}\right)' = -\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{u}{}^2} \cdot g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)^{-1}\right)' = f'(x)\cdot g(x)^{-1} + f(x)\left(-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\right)$$

$$g(x)^{-1} = \frac{1}{g(x)}$$

$$= f'(x)\cdot g(x)^{-1} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Beispiel: optimale Konsumentscheidung

Die Konsumentscheidung $x \geq 0$ für ein Gut hänge vom verfügbaren Einkommen $m \geq 0$ ab:

äußere Fkt. $\quad x : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

Das verfügbare Einkommen $m \geq 0$ hänge vom Lohnsatz $\omega \geq 0$ ab:

innere Fkt. $\quad m : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

Mit der Kettenregel können wir berechnen, wie sich der Konsum ändert, falls sich der Lohnsatz ändert:

$$(x(m(\omega)))' = \frac{d}{d\omega}(x(m(\omega))) = \underbrace{\frac{dx(m)}{dm}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\frac{dm(\omega)}{d\omega}}_{\text{innere Abl.}} = x'(m) \cdot m'(\omega)$$

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung f' wird auch **erste Ableitung** genannt.

Wird die Ableitungsfunktion f' erneut abgeleitet, heißt das Resultat **zweite Ableitung**: $f'' = (f')'$.

$f''(x)$ ist dann die zweite Ableitung an der Stelle x.

Alternative Notation:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$$

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2 \cdot x \qquad \left(f'(x)\right)' = f''(x) = 2$

Dritte und höhere Ableitungen

Dritte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y''' = f'''(x)$$

Vierte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

***n*-te Ableitung**

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

6.10 Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \approx 2.71828^x \ , x \in \mathbb{R}$$

Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wir hatten zuvor argumentiert: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

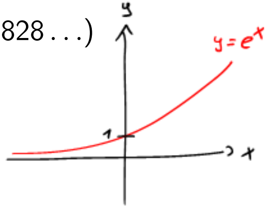
Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Überblick: Natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = exp(x) = e^x \qquad (e = 2.71828\ldots)$$



ist differenzierbar und strikt monoton wachsend.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x > 0$$

Die folgenden Eigenschaften gelten für alle Exponenten s und t:

$$(a)\ e^s e^t = e^{s+t} \qquad (b)\ e^s/e^t = e^{s-t} \qquad (c)\ (e^s)^t = e^{st}$$

Ferner gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Die allgemeine Exponentialfunktion

Sei $a > 0$. Dann ist die allgemeine Exponentialfunktion definiert durch

$$f(x) = a^x$$

Da der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist, gilt:

$$a = e^{\ln(a)}$$

innere Funktion: $\ln(a) \cdot x$
innere Abl.: $\ln(a)$
äußere Funktion: e^u
äußere Ableitung: e^u

Damit:

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)x}$$

Mit der Kettenregel:

$$f'(x) = \underbrace{\ln(a)}_{\text{innere}}\underbrace{\overbrace{e^{\ln(a)x}}^{a^x}}_{\text{äußere}} = \ln(a)a^x$$

Ableitung

6.11 Logarithmusfunktion

$\ln(y)' = \frac{1}{y}$

Natürliche Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion $g(y) = \ln(y)$ für $y > 0$ erfüllt

$$\ln(y) = x \text{ für } y = e^x \ ,$$

sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

"für alle"

innere Fkt: $\ln(y) \overset{\text{Abl.}}{\rightsquigarrow} \ln(y)'$

äußere Fkt: $e^u \rightsquigarrow e^u$

Es gilt also auch

$$e^{\ln(y)} = y \ \boxed{\forall} \ y > 0$$

Anwendung der Kettenregel ergibt

$\frac{dy}{dy}$

$$\frac{de^{\ln(y)}}{dy} = \underbrace{e^{\ln(y)}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\ln'(y)}_{\text{innere}} = 1 \Leftrightarrow \ln'(y) = 1/e^{\ln(y)} = 1/y$$

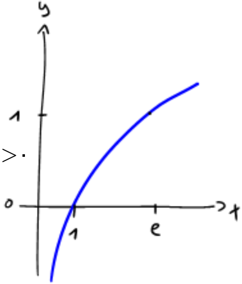
Ableitung

Überblick: Natürliche Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion

$$g(x) = \ln(x)\ ,\ \ x > 0$$

ist differenzierbar und strikt monoton wachsend in $\mathbb{R}_>$.



Es gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Nach Definition gilt $e^{\ln(x)} = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}_>$ und $\ln(e^x) = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Die folgenden Eigenschaften gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}_>$ und $p \in \mathbb{R}$:

$$(a)\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (b)\ \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y) \quad (c)\ \ln(x^p) = p\ln(x)$$

Ferner gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty \qquad \ln(1) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

Zusammenfassung

- Differenzen-Quotient
- Monotonie
- Grenzwerte
- Ableitungsregeln
- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion