

Eigenschaften von Funktionen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

5.1 Verschiebung von Graphen

5.2 Neue Funktionen aus alten

5.3 Inverse Funktionen

5.4 Graphen von Gleichungen

5.5 Abstand in der Ebene

(5.6 Allgemeine Funktionen)

5.1 Verschiebung von Graphen

5.1 Verschiebung von Graphen

Sei f eine Funktion und c eine reelle Zahl.

Wie steht der Graph der Funktion f in Beziehung zu den Graphen der Funktionen

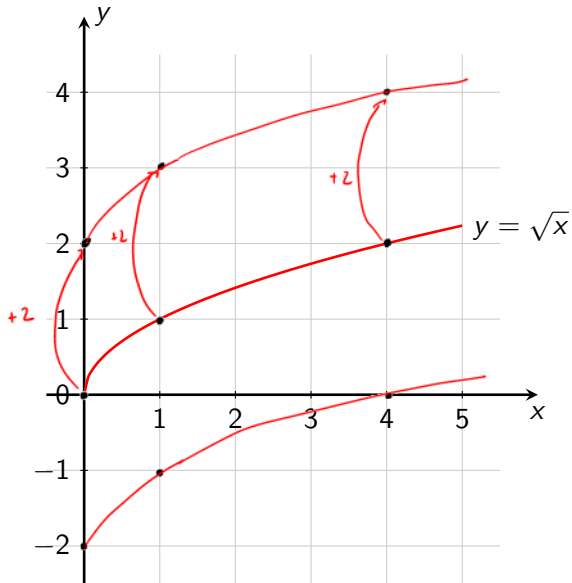
► $f(x) + c$

► $f(x + c)$

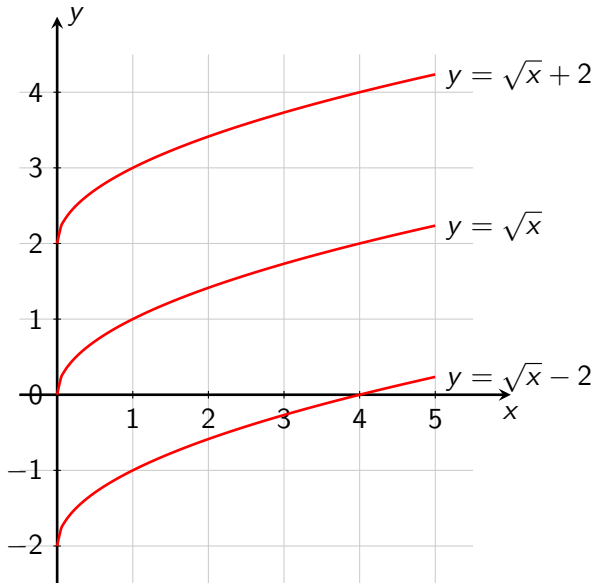
► $cf(x)$

► $f(-x)$?

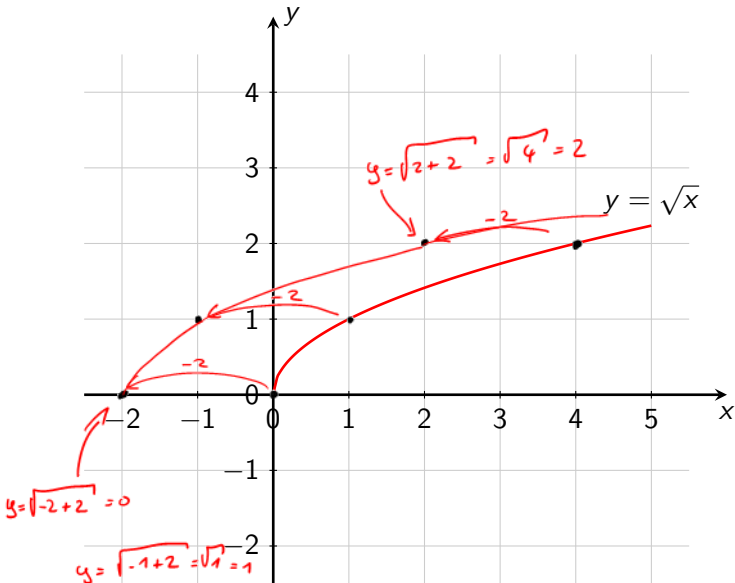
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x} \pm 2$



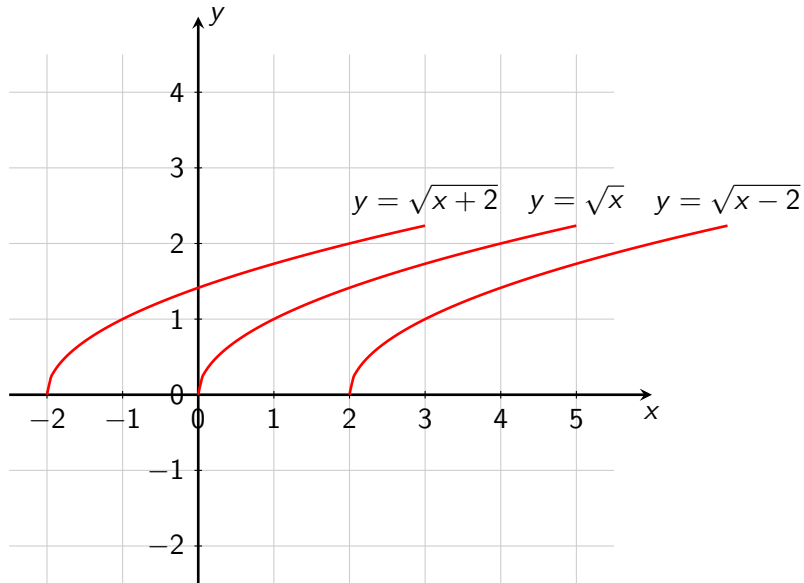
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x} \pm 2$



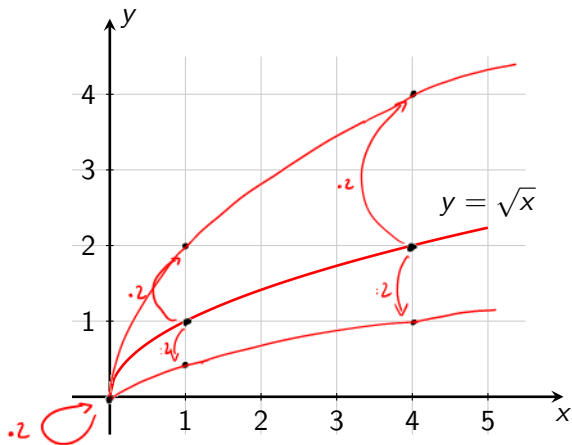
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x \pm 2}$



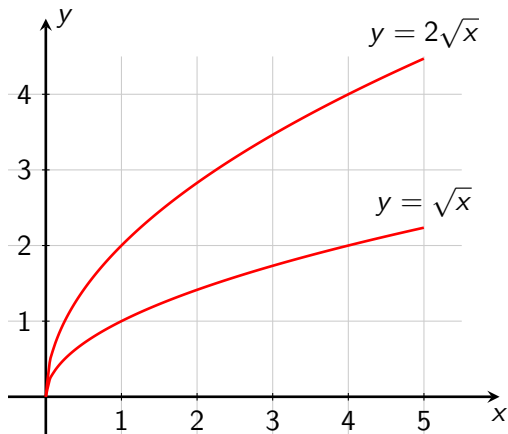
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x \pm 2}$



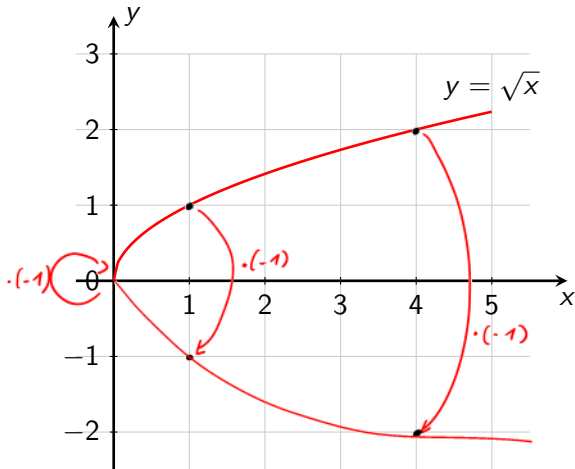
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$



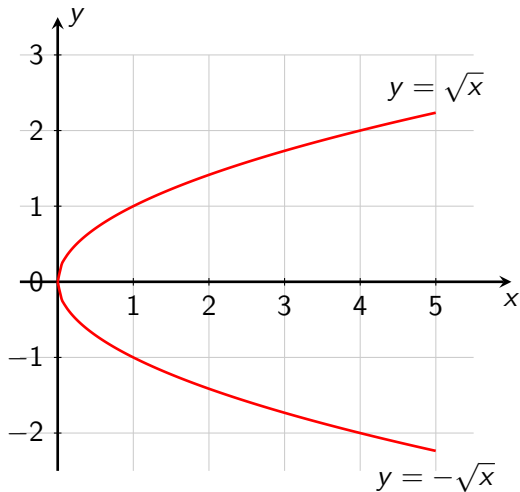
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$



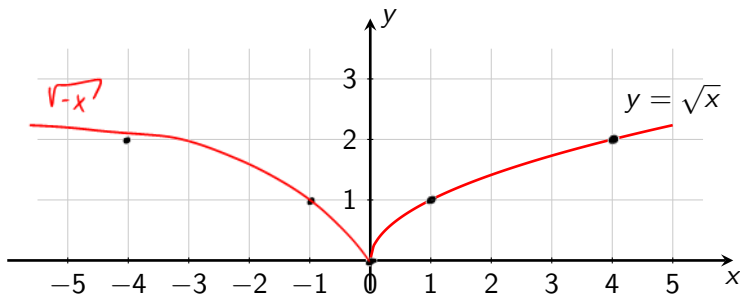
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$



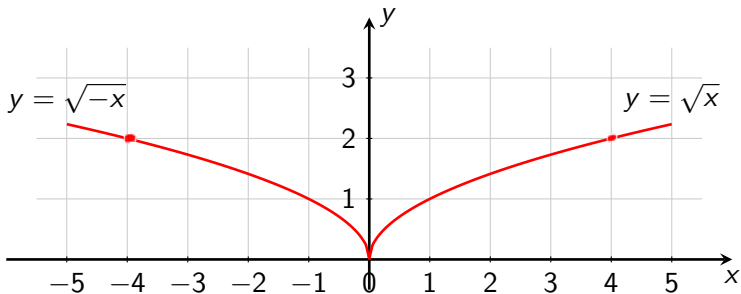
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$



Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$



Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$



Addition einer Konstanten

Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$$y = f(x) + c:$$

- ▶ $c > 0$: der Graph wird um c Einheiten nach oben verschoben.
- ▶ $c < 0$: der Graph wird um c Einheiten nach unten verschoben.

$$y = f(x + c):$$

- ▶ $c > 0$: der Graph wird um c Einheiten nach links verschoben.
- ▶ $c < 0$: der Graph wird um c Einheiten nach rechts verschoben.

Multiplikation mit einer Konstanten

Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$$y = cf(x):$$

- ▶ $|c| > 1$: der Graph wird vertikal gestreckt.
- ▶ $|c| < 1$: der Graph wird vertikal gestaucht.
- ▶ $c < 0$: der Graph wird an der x -Achse gespiegelt.

$$y = f(cx):$$

- ▶ $|c| > 1$: der Graph wird horizontal gestaucht.
- ▶ $|c| < 1$: der Graph wird horizontal gestreckt.
- ▶ $c < 0$: der Graph wird an der y -Achse gespiegelt.

5.2 Neue Funktionen aus alten

5.2 Neue Funktionen aus alten: Summe und Differenz

Seien f und g zwei Funktionen.

Summe von f und g :

Die Funktion h , die durch $h(x) = f(x) + g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Summe** von f und g , wir schreiben $h = f + g$.

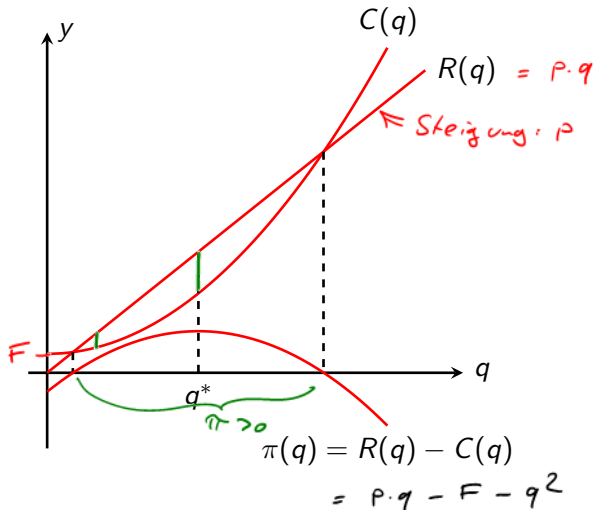
Differenz von f und g :

Die Funktion k , die durch $k(x) = f(x) - g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Differenz** von f und g , wir schreiben $k = f - g$.

Beispiel: Gewinn = Erlös – Kosten

Erlös: $R(q) = q \cdot p$, wobei p Marktpreis und q Menge

Kosten: $C(q) = q^2 + \text{Fixkosten}$



5.2 Neue Funktionen aus alten: Produkt und Quotient

Seien f und g zwei Funktionen.

Produkt von f und g :

Die Funktion h , die durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Produkt** von f und g , wir schreiben $h = f \cdot g$.

Quotient von f und g :

Die Funktion k , definiert wo $g(x) \neq 0$, durch $k(x) = f(x)/g(x)$, bezeichnet man als den **Quotienten** von f und g und wir schreiben $k = f/g$.

Beispiel: Durchschnittskosten

Sei die Kostenfunktion c einer Firma, die $q \geq 0$ Einheiten produziert, gegeben durch

$$c(q) = \underbrace{aq^3 + bq^2 + cq}_{\text{Variable Kosten}} + \underbrace{d}_{\text{Fix Kosten}}.$$

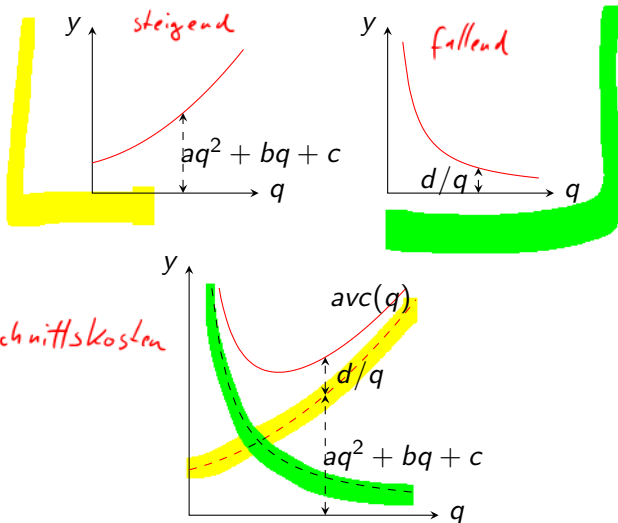
Die Durchschnittskosten avc sind dann für $q > 0$ mit $avc(q) = c(q)/q$ definiert durch

$$avc(q) = \underbrace{aq^2 + bq + c}_{\text{durchschnittliche variablen Kosten}} + \underbrace{\frac{d}{q}}_{\text{durchschnittliche Fixkosten}}.$$

$aq^2 + bq + c$: durchschnittliche variablen Kosten

$\frac{d}{q}$: durchschnittliche Fixkosten

Durchschnittliche variable & fixe Kosten, Durchschnittskosten



Verkettung von Funktionen

Es seien f und g zwei Funktionen.

Es wird zunächst die Funktion g auf ein Element x angewendet.

Schließlich wird f auf $g(x)$ angewendet.

Wir schreiben

$$(\underline{f} \circ \underline{g})(x) = f(g(x))$$

Beispiel von Kap. 4.

innere Funktion $q^*(p)$

äußere Funktion $\pi(q^*(p))$

Beispiel: Gewinnfunktion

Produktionsfunktion f

$x \geq 0$: Inputmenge, $f(x) \geq 0$: Outputmenge

Kostenfunktion c

$x \geq 0$: Inputmenge, $c(x) \geq 0$: Kosten

Preis-Absatzfunktion p

$q \geq 0$: Outputmenge, $p(q) \geq 0$: Preis

Gewinnfunktion π

$x \geq 0$: Inputmenge, $\pi(x)$: Gewinn

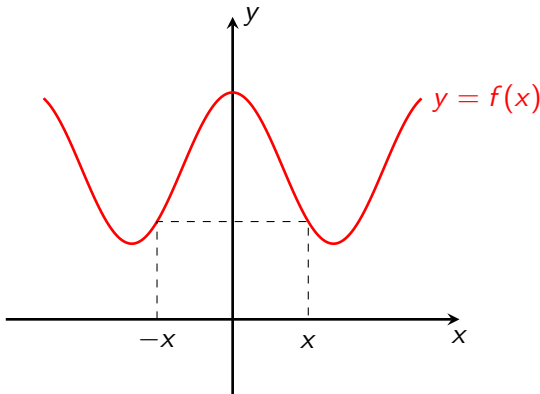
$$\pi(x) := (p \circ f)(x) \cdot f(x) - c(x) = p(f(x)) \cdot f(x) - c(x)$$

Preis Menge Erlös

Definition: Symmetrie zur y -Achse

Es sei f eine Funktion.

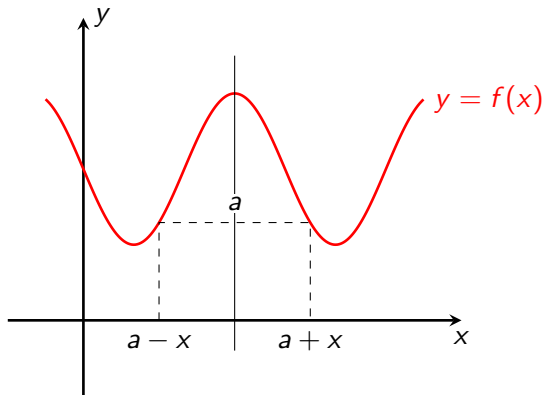
Wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x ,
dann ist f **symmetrisch zur y -Achse**.



Definition: Symmetrie zur Geraden $x = a$

Es sei f eine Funktion.

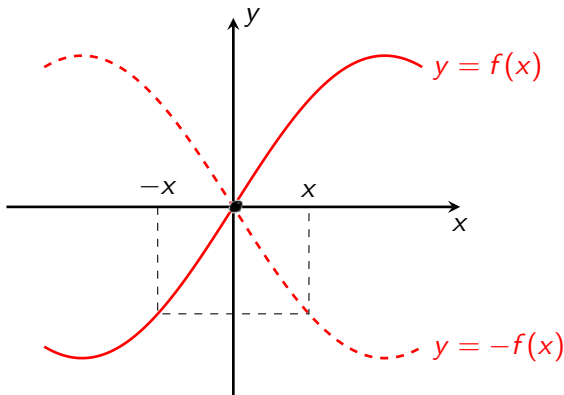
Wenn $f(a + x) = f(a - x)$ für alle x ,
dann ist f **symmetrisch zur Geraden** $x = a$.



Definition: Symmetrie zum Ursprung

Es sei f eine Funktion.

Wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle x ,
dann ist f **symmetrisch zum Ursprung**.



Symmetrie: Beispiel

Symmetrie zur Geraden $x=a$:
 $f(a-x) = f(a+x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung
 $f(-x) = -f(x)$

Sind die Funktionen

$$-4x^3 = 4(-x)^3 \quad : 4$$

und

symmetrisch?

$$\Rightarrow -x^3 = (-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = -x \cdot x \cdot x = -x^3 \quad \checkmark$$

ist punktsymmetrisch

$$f(x) = 4x^3$$

$$\begin{array}{l} x=2 \quad f(2) = 4 \cdot 2^3 = 32 \\ x=-2 \quad f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 = -32 \end{array}$$

$$g(x) = -3x^4 + 2x^2$$

$$g(-x) = -3(-x)^4 + 2(-x)^2 = -3x^4 + 2x^2 = g(x)$$

5.3 Inverse Funktionen

Definition: Eins zu Eins oder umkehrbar eindeutig

Es sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

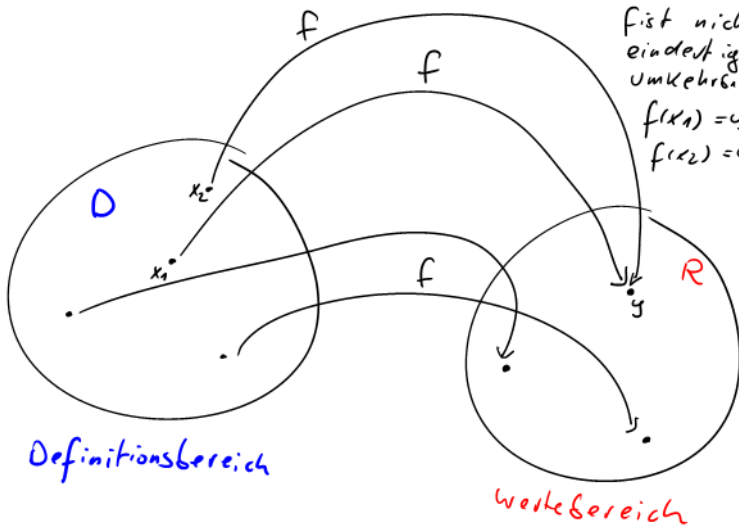
Der Wertebereich $R = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}$ besteht aus allen Zahlen, die man erhält, wenn man x in D variiert.

f ist **Eins zu Eins** oder **umkehrbar eindeutig** in D , wenn f niemals denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten aus D annimmt.

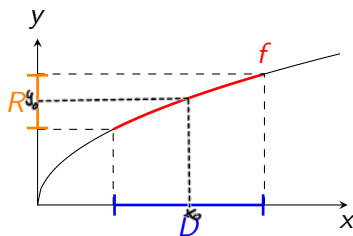
Für jedes $y \in R$ gibt es genau ein $x \in D$, so dass $y = f(x)$.

$\Leftrightarrow$

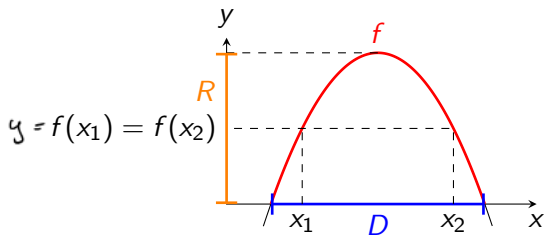
Wenn $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 \neq x_2$, dann gilt auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Beispiele



f ist umkehrbar eindeutig.



f ist nicht umkehrbar eindeutig.

Definition: Inverse Funktion f^{-1}

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und Wertebereich R .

Genau dann, wenn f umkehrbar eindeutig ist, hat sie eine **inverse Funktion** g mit Definitionsbereich R und Wertebereich D .

Die Funktion g ist durch folgende Regel gegeben:

Für jedes $y \in R$ ist der Wert $g(y)$ die eindeutig bestimmte Zahl $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Dann gilt:

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \text{ (für } x \in D, y \in R)$$

Eine direkte Folgerung ist:

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D \text{ und } f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in R$$

Beispiel: Inverse Nachfrage

Probe

$$\begin{aligned} D(p(q)) \\ &= D\left(9 - \frac{3}{4}q\right) \\ &= 12 - \frac{4}{3}\left(9 - \frac{3}{4}q\right) \end{aligned}$$

Preis

9

$$\begin{aligned} &= 12 - \frac{4}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot q \\ &= 12 - 4 \cdot 3 + q \\ &= 9 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Funktionswert

Variable

$$q = 12 - \frac{4}{3}p \quad 1 - q + \frac{4}{3}p$$

Nachfragefunktion

$$q = D(p) = 12 - \frac{4}{3}p$$

gesucht:

inverse Nachfragefunktion

$$P(q) = ? \quad 9 - \frac{3}{4}q$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}p = 12 - q \quad | \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow p = 12 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4}q$$

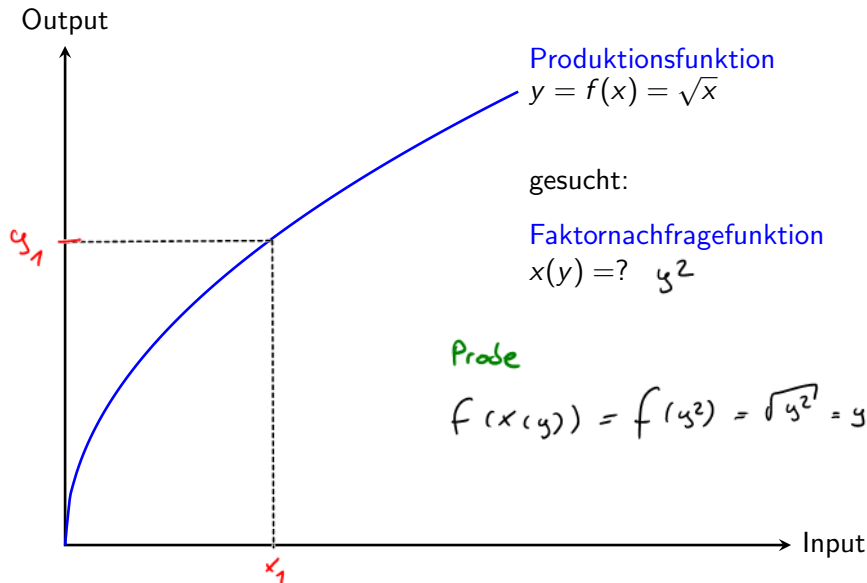
$$p = 9 - \frac{3}{4}q$$

Menge

12

Beispiel: Faktornachfrage

Pause bis 11⁰⁰ Uhr

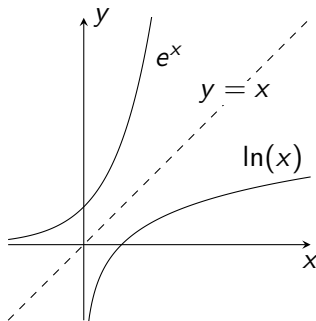


Symmetrie inverser Funktionen

Wenn zwei Funktionen f und g Inverse zu einander sind, dann sind die Graphen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$.

(Die Einheiten auf den Koordinatenachsen müssen diesselben sein.)

Beispiel:



5.4 Graphen von Gleichungen

5.4 Graphen von Gleichungen

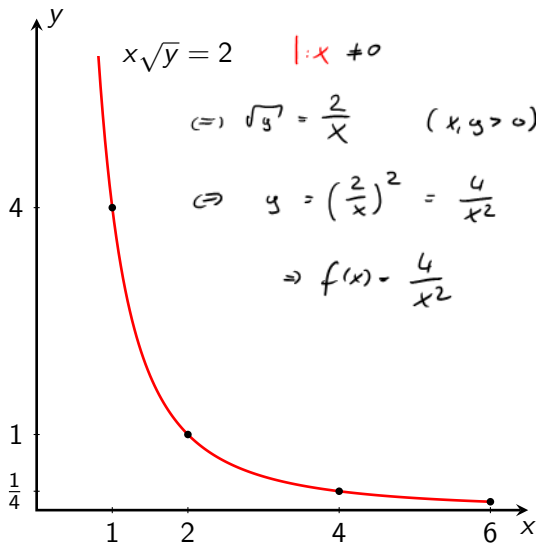
Betrachtet sei eine beliebige Gleichung mit den beiden Variablen x und y .

Eine **Lösung** ist ein Tupel (a, b) , sodass die Gleichung an der Stelle $(x, y) = (a, b)$ erfüllt ist.

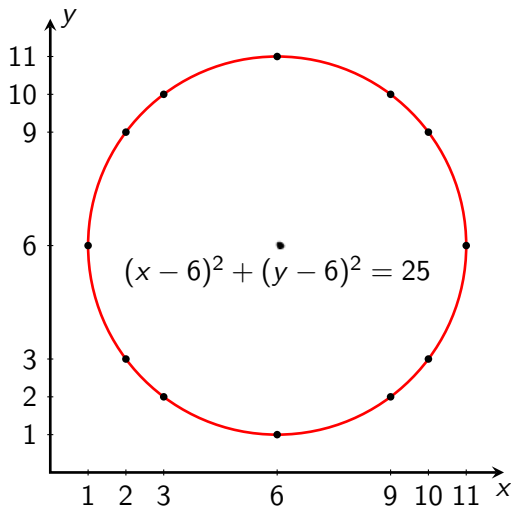
Die **Lösungsmenge** ist die Menge **aller** Tupel (a, b) , die die Gleichung erfüllen.

Der **Graph** ist die Darstellung der Lösungsmenge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Beispiele: Indifferenzkurven



Beispiele: Indifferenzkurven

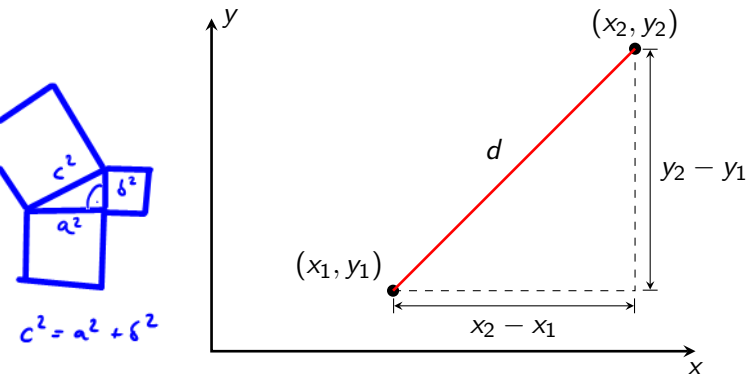


5.5 Abstand in der Ebene

Definition: Abstandsformel

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Spezialfall

$$y_1 = y_2$$

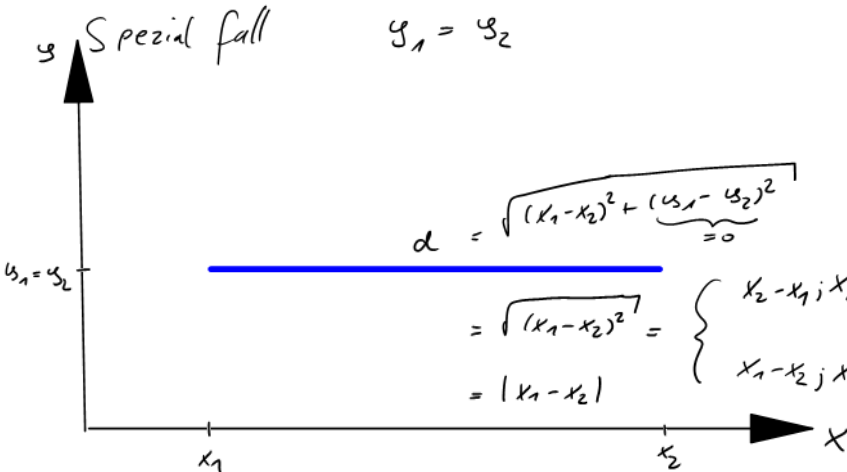
$$y_1 = y_2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{=0}}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} =$$

$$= |x_1 - x_2|$$

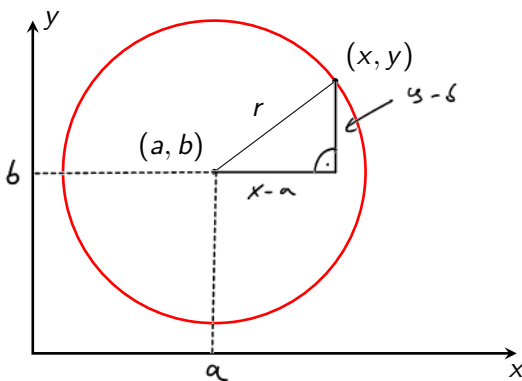
$$\begin{cases} x_2 - x_1; & x_2 \geq x_1 \\ x_1 - x_2; & x_2 < x_1 \end{cases}$$



Definition: Kreisgleichung

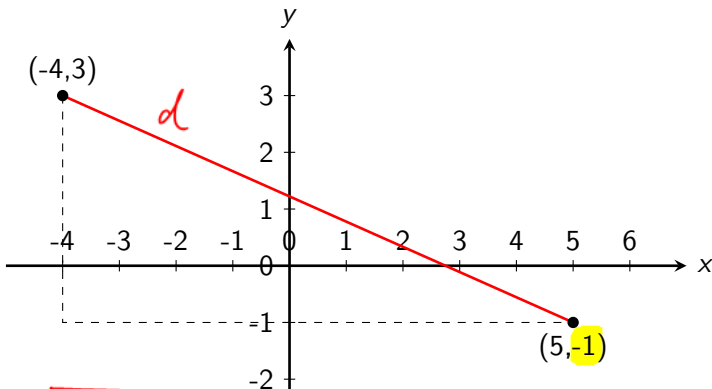
Die **Gleichung eines Kreises** mit **Mittelpunkt** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und **Radius** $r \in \mathbb{R}$ ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$



Beispiel: Abstand in der xy-Ebene

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(5 + 4)^2 + 4^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \approx 10 \end{aligned}$$

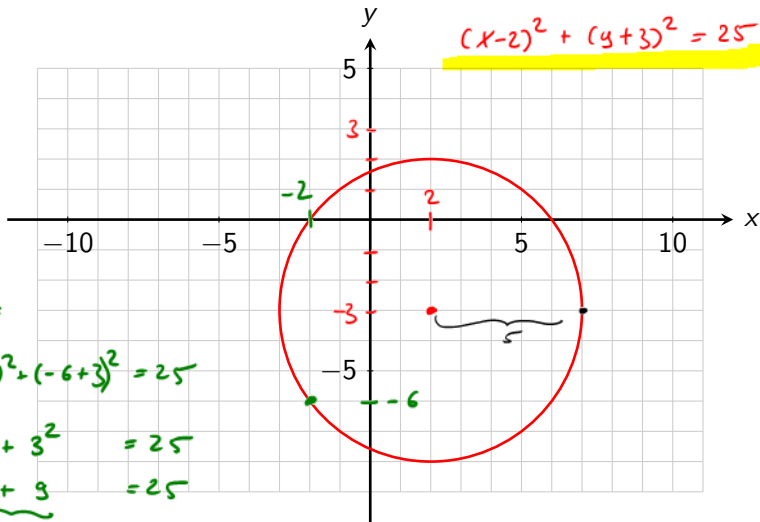
Wie lautet die Kreisgleichung?

Mittelpunkt : $(a, b) = (2, -3)$

Radius : $r = 5$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



Probe:

$$(-2-2)^2 + (-6+3)^2 = 25$$

$$4^2 + 3^2 = 25$$

$$\underbrace{16 + 9}_{25} = 25 \checkmark$$

Zusammenfassung

- ▶ Verschiebung von Graphen
 $f(x) + c$: vertikal, $f(x + c)$: horizontal
 $-f(x)$: Spiegelung x -Achse, $f(-x)$: Spiegelung y -Achse
- ▶ Verknüpfung von Funktionen
Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Verkettung
- ▶ Inverse Funktionen
umkehrbar eindeutig, Symmetrie mit $x = y$
- ▶ Graphen von Gleichungen
- ▶ Abstand in der Ebene
Euklidischer Abstand, Kreisgleichung