

# Eigenschaften von Funktionen



Moodle



Lehrbuch

---

<sup>1</sup>Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

5.1 Verschiebung von Graphen

5.2 Neue Funktionen aus alten

5.3 Inverse Funktionen

5.4 Graphen von Gleichungen

5.5 Abstand in der Ebene

5.6 Allgemeine Funktionen

# 5.1 Verschiebung von Graphen

## 5.1 Verschiebung von Graphen

Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  gegeben.

Wie steht der Graph der Funktion  $f$  in Beziehung zu den Graphen der Funktionen

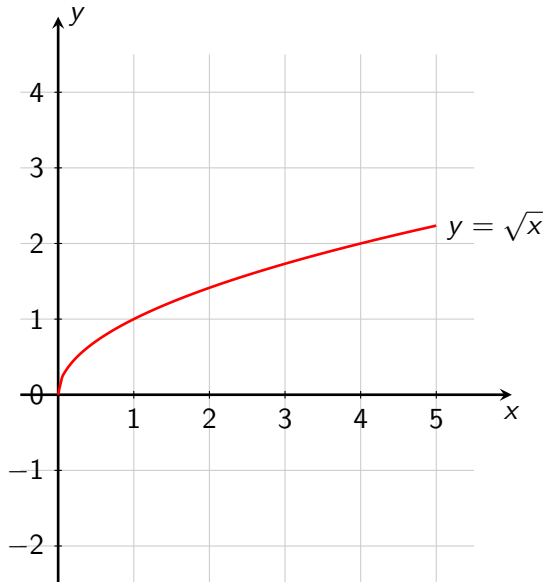
▶  $f(x) + c, x \in D$

▶  $f(x + c), x \in D$

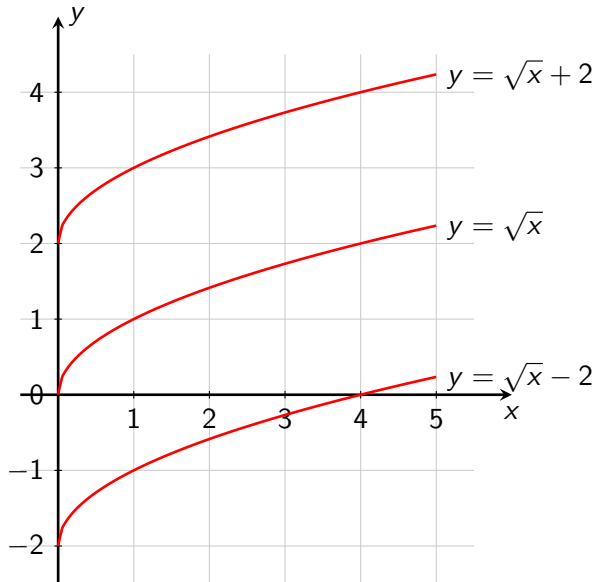
▶  $cf(x), x \in D$

▶  $f(-x), x \in D$  ?

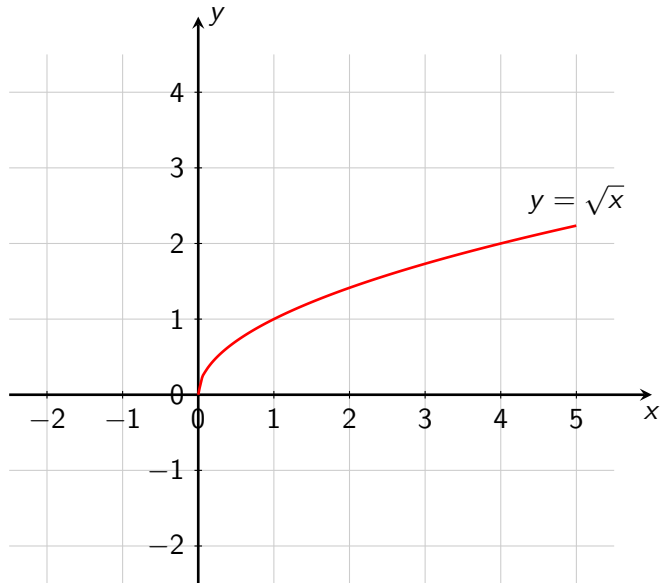
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{x} \pm 2$



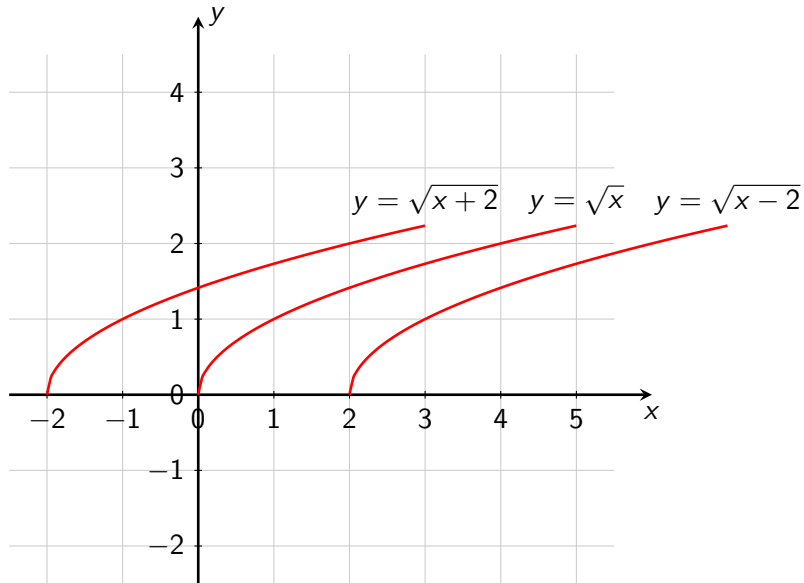
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{x} \pm 2$



Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{x \pm 2}$

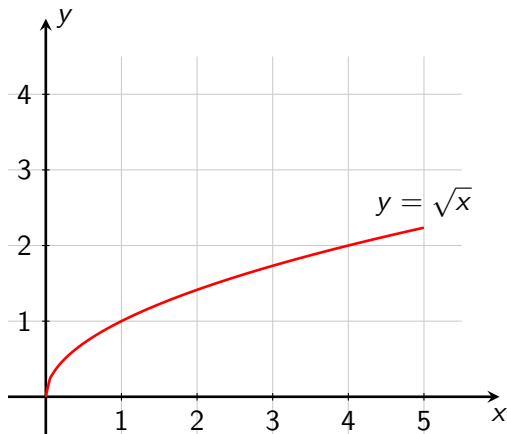


Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{x \pm 2}$

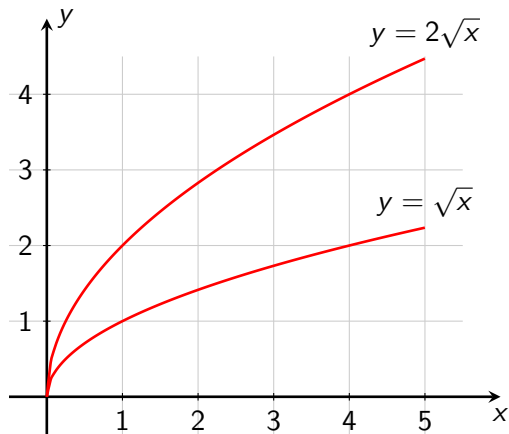




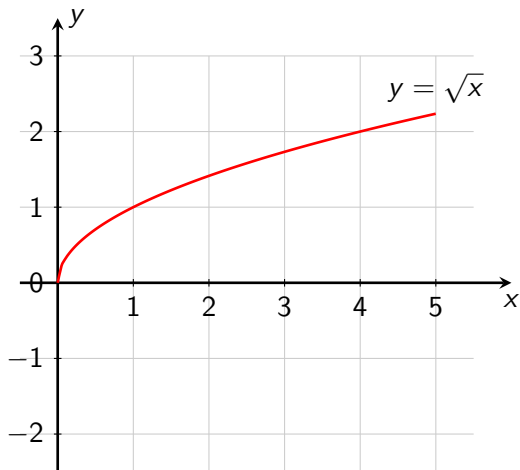
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = 2\sqrt{x}$



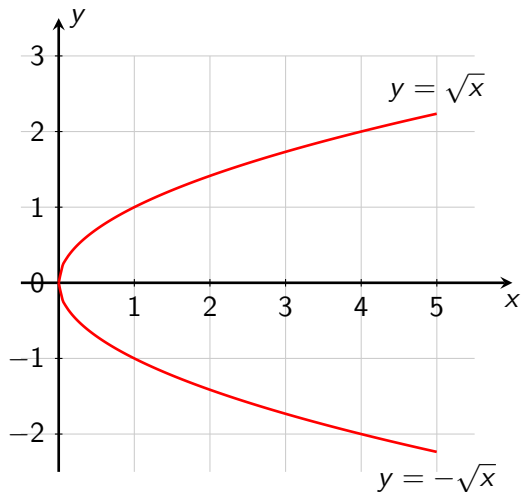
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = 2\sqrt{x}$



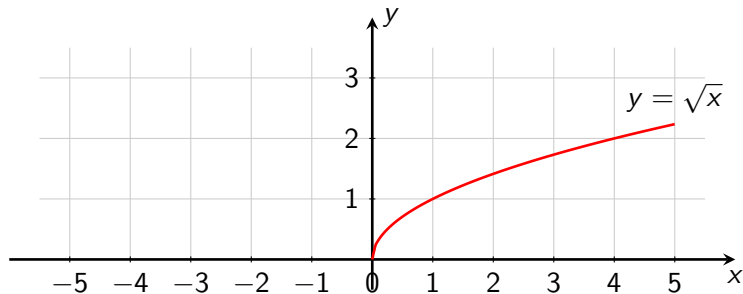
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = -\sqrt{x}$



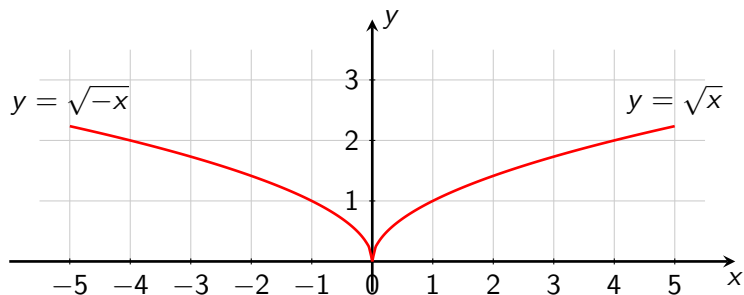
Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = -\sqrt{x}$



Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{-x}$



Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt{-x}$



# Addition einer Konstanten

## Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$$y = f(x) + c:$$

- ▶  $c > 0$ : der Graph wird um  $c$  Einheiten nach oben verschoben.
- ▶  $c < 0$ : der Graph wird um  $c$  Einheiten nach unten verschoben.

$$y = f(x + c):$$

- ▶  $c > 0$ : der Graph wird um  $c$  Einheiten nach links verschoben.
- ▶  $c < 0$ : der Graph wird um  $c$  Einheiten nach rechts verschoben.

# Multiplikation mit einer Konstanten

## Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$$y = cf(x):$$

- ▶  $|c| > 1$ : der Graph wird vertikal gestreckt.
- ▶  $|c| < 1$ : der Graph wird vertikal gestaucht.
- ▶  $c < 0$ : der Graph wird an der  $x$ -Achse gespiegelt.

$$y = f(cx):$$

- ▶  $|c| > 1$ : der Graph wird horizontal gestaucht.
- ▶  $|c| < 1$ : der Graph wird horizontal gestreckt.
- ▶  $c < 0$ : der Graph wird an der  $y$ -Achse gespiegelt.



## 5.2 Neue Funktionen aus alten

## 5.2 Neue Funktionen aus alten: Summe und Differenz

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

### Summe von $f$ und $g$ :

Die Funktion  $h$ , die durch  $h(x) = f(x) + g(x)$  definiert ist, bezeichnet man als die **Summe** von  $f$  und  $g$ , wir schreiben  $h = f + g$ .

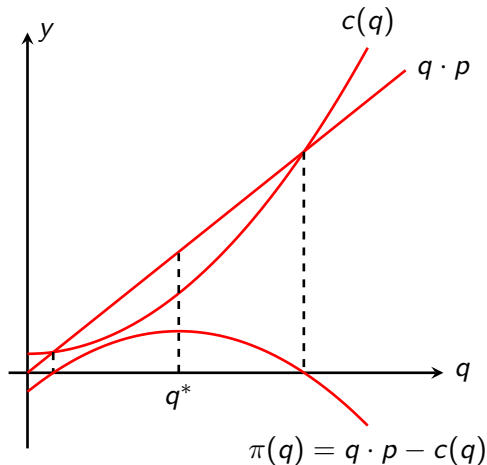
### Differenz von $f$ und $g$ :

Die Funktion  $k$ , die durch  $k(x) = f(x) - g(x)$  definiert ist, bezeichnet man als die **Differenz** von  $f$  und  $g$ , wir schreiben  $k = f - g$ .

## Beispiel: Gewinn = Einnahmen – Kosten

Einnahmen:  $q \cdot p$ , wobei  $p$  Marktpreis und  $q$  Menge

Kosten:  $c(q) = q^2 + \text{Fixkosten}$



## 5.2 Neue Funktionen aus alten: Produkt und Quotient

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

### Produkt von $f$ und $g$ :

Die Funktion  $h$ , die durch  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  definiert ist, bezeichnet man als die **Produkt** von  $f$  und  $g$ , wir schreiben  $h = f \cdot g$ .

### Quotient von $f$ und $g$ :

Die Funktion  $k$ , definiert wo  $g(x) \neq 0$ , durch  $k(x) = f(x)/g(x)$ , bezeichnet man als den **Quotienten** von  $f$  und  $g$  und wir schreiben  $k = f/g$ .

## Beispiel: Durchschnittskosten

Sei die Kostenfunktion  $c : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}$  einer Firma, die  $q \geq 0$  Einheiten produziert, gegeben durch

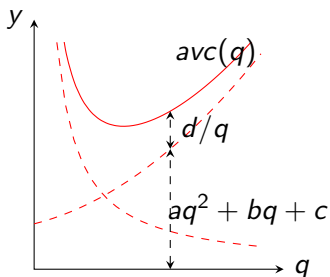
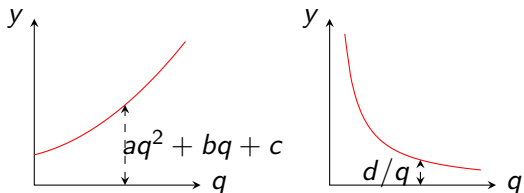
$$c(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d .$$

Die Durchschnittskosten  $avc : \mathbb{R}_{>} \rightarrow \mathbb{R}$  sind dann mit  $avc(q) = c(q)/q$  definiert durch

$$avc(q) = aq^2 + bq + c + \frac{d}{q} .$$

Der Teil  $aq^2 + bq + c$  bezeichnet die durchschnittlichen variablen Kosten und der Teil  $\frac{d}{q}$  bezeichnet die durchschnittlichen Fixkosten.

# Durchschnittliche variable & fixe Kosten, Durchschnittskosten



# Verkettung von Funktionen

Es sei  $g : E \rightarrow D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $E, D \subseteq \mathbb{R}$ .

Es wird zunächst die Funktion  $g$  auf ein Element  $x$  aus  $E$  angewendet. Der Funktionswert  $g(x)$  ist dann ein Element aus  $D$ .

Schließlich wird  $f$  auf  $g(x)$  angewendet, der Funktionswert  $f(g(x))$  ist dann ein Element aus  $\mathbb{R}$ .

Wir schreiben

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ für } x \in E$$

## Beispiel: Gewinnfunktion

Produktionsfunktion  $f : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$

$x \geq 0$ : Input,  $f(x) \geq 0$ : Output

Kostenfunktion  $c : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$

$x \geq 0$ : Input,  $c(x) \geq 0$ : Kosten

Preis-Absatzfunktion  $p : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$

$q \geq 0$ : Output,  $p(q) \geq 0$ : Preis

Gewinnfunktion  $\pi : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \geq 0$ : Input,  $\pi(x)$ : Gewinn

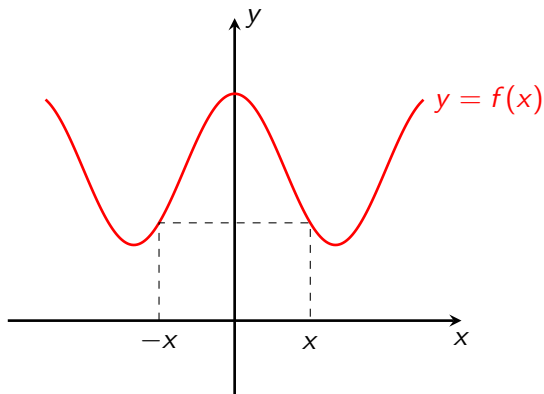
$$\pi(x) := (p \circ f)(x) \cdot f(x) - c(x) = p(f(x)) \cdot f(x) - c(x)$$



## Definition: Symmetrie zur $y$ -Achse

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

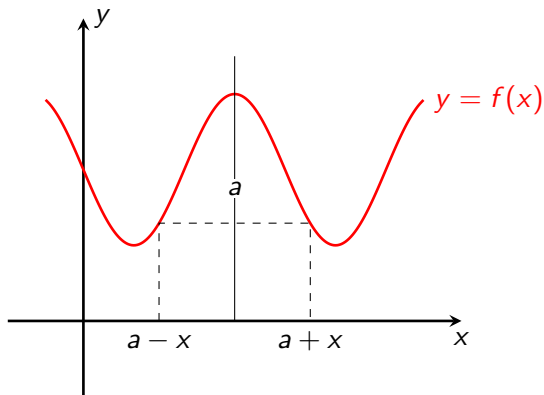
Wenn  $f(-x) = f(x) \forall x \in D$ , ist  $f$  **symmetrisch zur  $y$ -Achse**.



## Definition: Symmetrie zur Geraden $x = a$

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

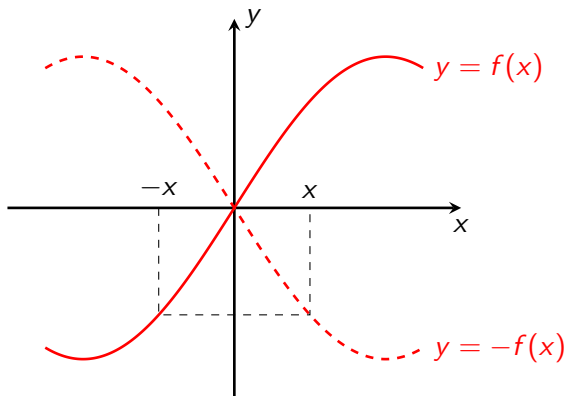
Wenn  $f(a + x) = f(a - x) \forall x \in D$ , ist  $f$  **symmetrisch zur Geraden  $x = a$** .



## Definition: Symmetrie zum Ursprung

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

Wenn  $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$ , ist  $f$  **symmetrisch zum Ursprung**.



# Symmetrie: Beispiel

Sind die Funktionen

$$f(x) = 4x^3$$

und

$$g(x) = -3x^4 + 2x^2$$

symmetrisch?

## 5.3 Inverse Funktionen

## Definition: Eins zu Eins oder umkehrbar eindeutig

Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

Der Wertebereich  $R = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}$  besteht aus allen Zahlen, die man erhält, wenn man  $x$  in  $D$  variiert.

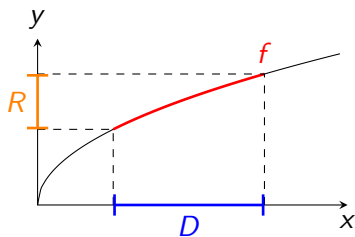
$f$  ist **Eins zu Eins** oder **umkehrbar eindeutig** in  $D$ , wenn  $f$  niemals denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten aus  $D$  annimmt.

Für jedes  $y \in R$  gibt es genau ein  $x \in D$ , so dass  $y = f(x)$ .

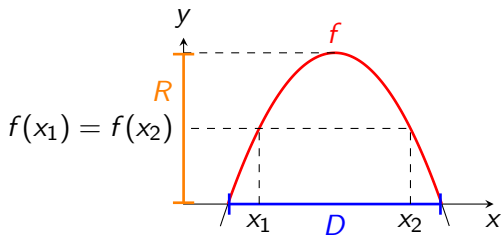
$\Leftrightarrow$

Wenn  $x_1, x_2 \in D$  und  $x_1 \neq x_2$ , dann gilt auch  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

# Beispiele



$f$  ist umkehrbar eindeutig.



$f$  ist nicht umkehrbar eindeutig.

## Definition: Inverse Funktion $f^{-1}$

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und Wertebereich  $R \subseteq \mathbb{R}$ .

Genau dann, wenn  $f$  umkehrbar eindeutig ist, hat sie eine **inverse Funktion**  $g$  mit Definitionsbereich  $R$  und Wertebereich  $D$ .

Die Funktion  $g$  ist durch folgende Regel gegeben:

Für jedes  $y \in R$  ist der Wert  $g(y)$  die eindeutig bestimmte Zahl  $x \in D$  mit  $f(x) = y$ .

Dann gilt:

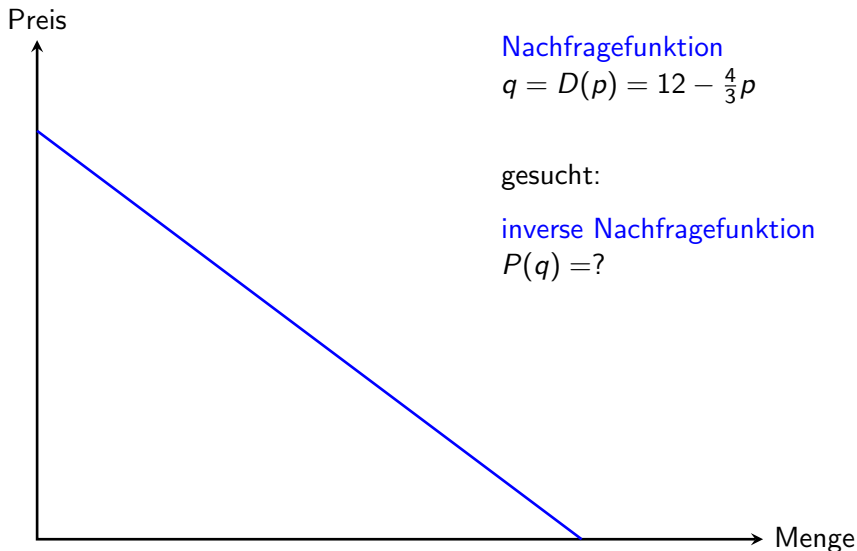
$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \quad (\text{für } x \in D, y \in R)$$

Eine direkte Folgerung ist:

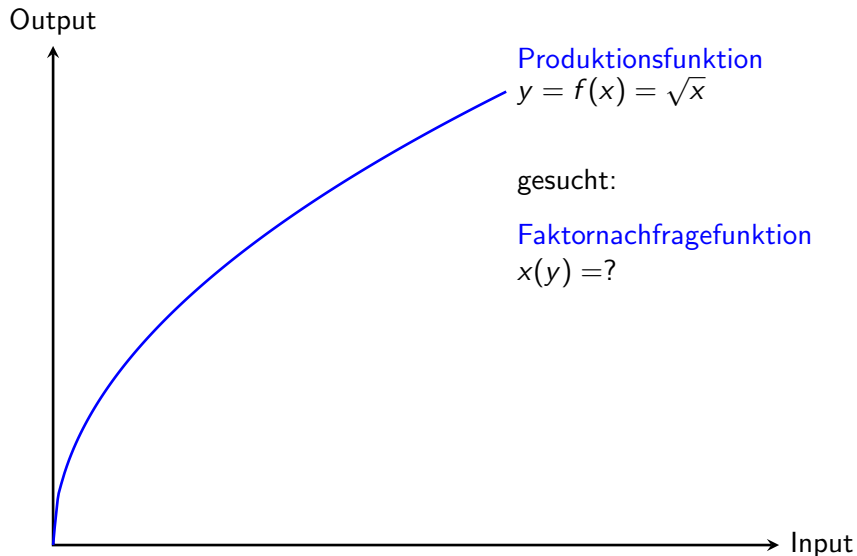
$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in D \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in R$$



# Beispiel: Inverse Nachfrage



# Beispiel: Faktornachfrage

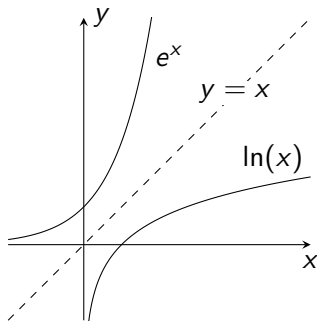


# Symmetrie inverser Funktionen

Wenn zwei Funktionen  $f$  und  $g$  Inverse zu einander sind, dann sind die Graphen  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  symmetrisch zur Geraden  $y = x$ .

(Die Einheiten auf den Koordinatenachsen müssen dieselben sein.)

Beispiel:



# 5.4 Graphen von Gleichungen

## 5.4 Graphen von Gleichungen

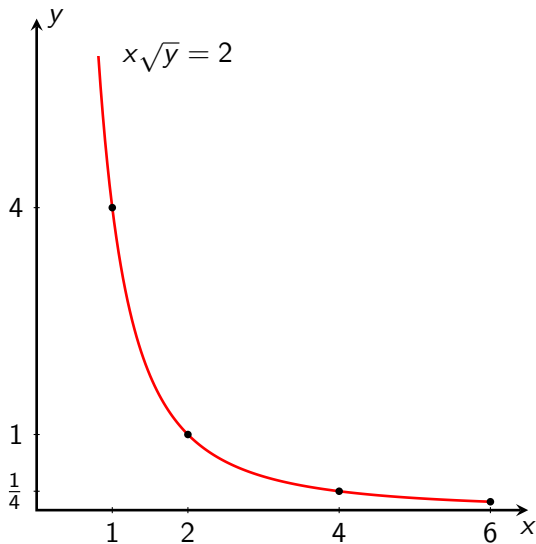
Betrachtet sei eine beliebige Gleichung mit den beiden Variablen  $x$  und  $y$ .

Eine **Lösung** ist ein Tupel  $(a, b)$ , sodass die Gleichung an der Stelle  $(x, y) = (a, b)$  erfüllt ist.

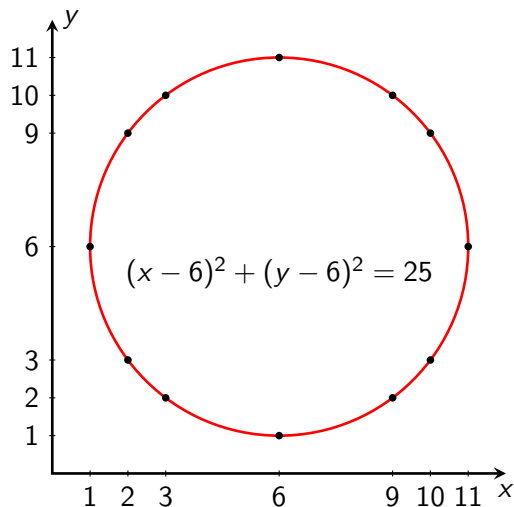
Die **Lösungsmenge** ist die Menge **aller** Tupel  $(a, b)$ , die die Gleichung erfüllen.

Der **Graph** ist die Darstellung der Lösungsmenge in einem kartesischen Koordinatensystem.

## Beispiele: Indifferenzkurven



## Beispiele: Indifferenzkurven



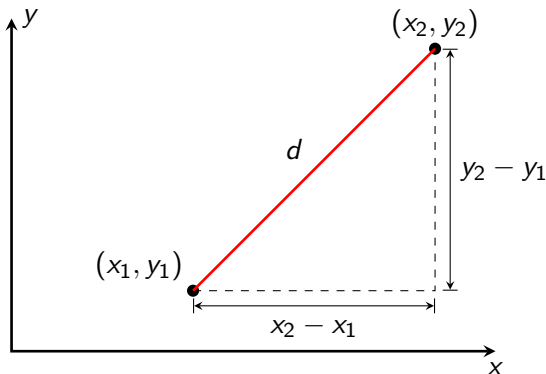
## 5.5 Abstand in der Ebene



## Definition: Abstandsformel

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  ist

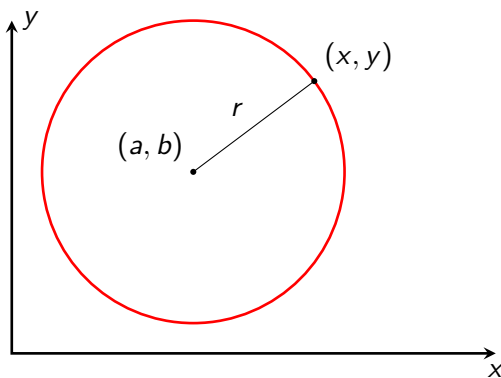
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



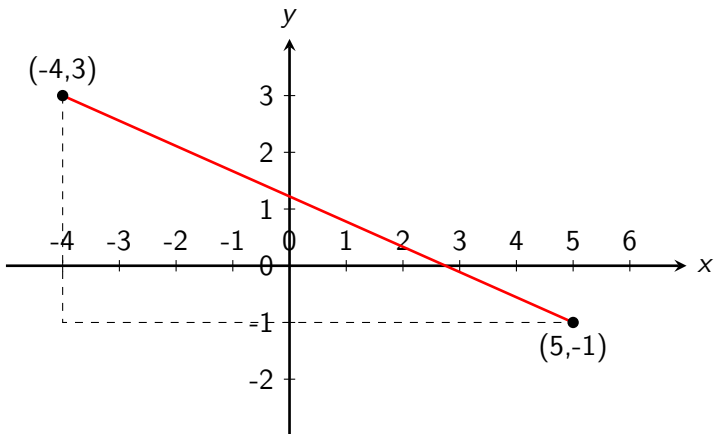
## Definition: Kreisgleichung

Die **Gleichung eines Kreises** mit **Mittelpunkt**  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  und **Radius**  $r \in \mathbb{R}$  ist

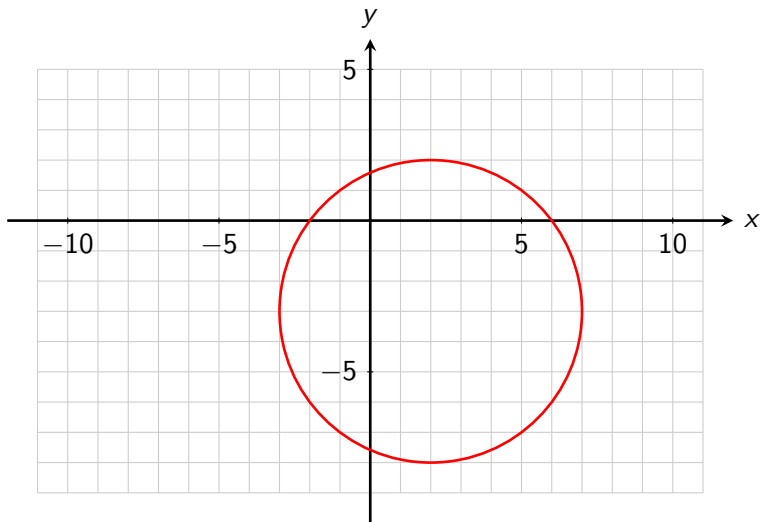
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



## Beispiel: Abstand in der $xy$ -Ebene



## Wie lautet die Kreisgleichung?



# Zusammenfassung

- ▶ Verschiebung von Graphen  
 $f(x) + c$ : vertikal,  $f(x + c)$ : horizontal  
 $-f(x)$ : Spiegelung  $x$ -Achse,  $f(-x)$ : Spiegelung  $y$ -Achse
- ▶ Verknüpfung von Funktionen  
Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Verkettung
- ▶ Inverse Funktionen  
umkehrbar eindeutig, Symmetrie mit  $x = y$
- ▶ Graphen von Gleichungen
- ▶ Abstand in der Ebene  
Euklidischer Abstand, Kreisgleichung