Vorlesung zu Kapitel 05:[1]

Eigenschaften von Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

5.1 Verschiebung von Graphen

5.1 Verschiebung von Graphen

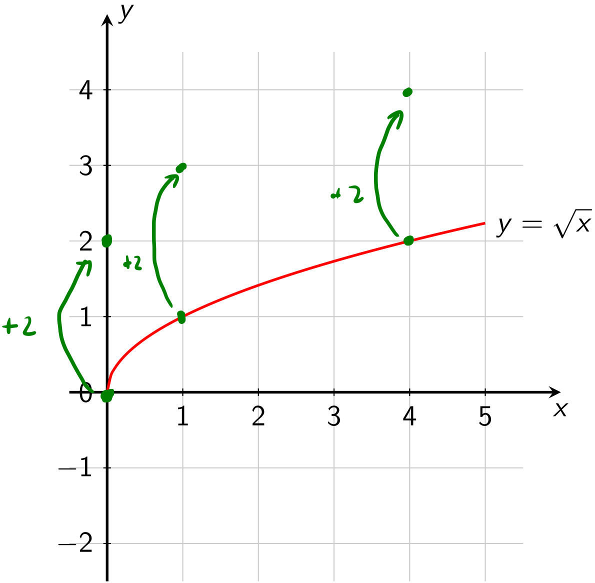
Seien $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wie steht der Graph der Funktion f in Beziehung zu den Graphen der Funktionen

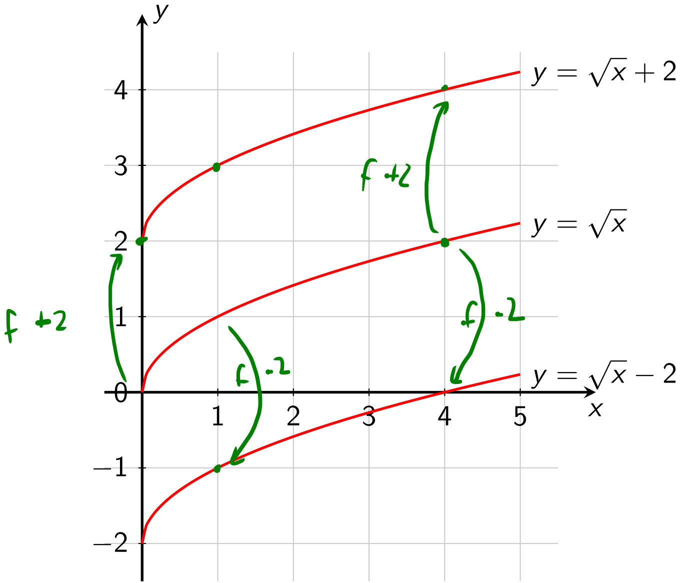
- $f(x) + c$, $x \in D$
- $f(x + c)$, $x \in D$
- $cf(x)$, $x \in D$
- $f(-x)$, $x \in D$?

$c = -1$

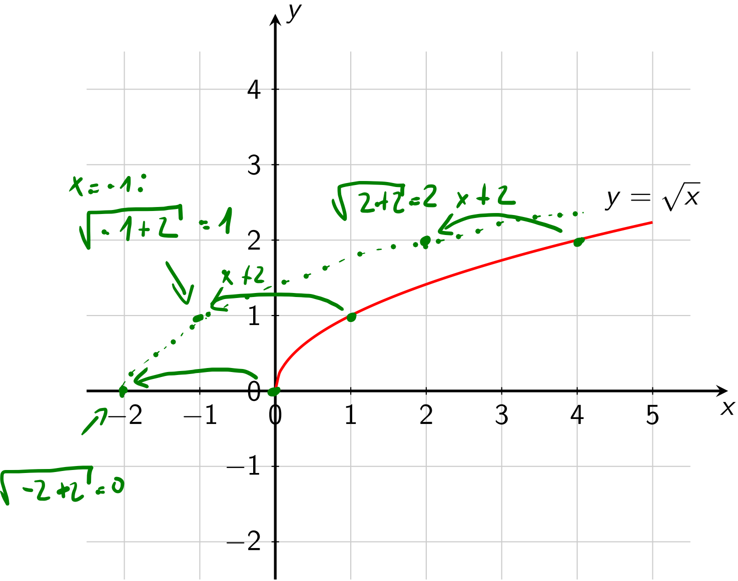
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x} \pm 2$



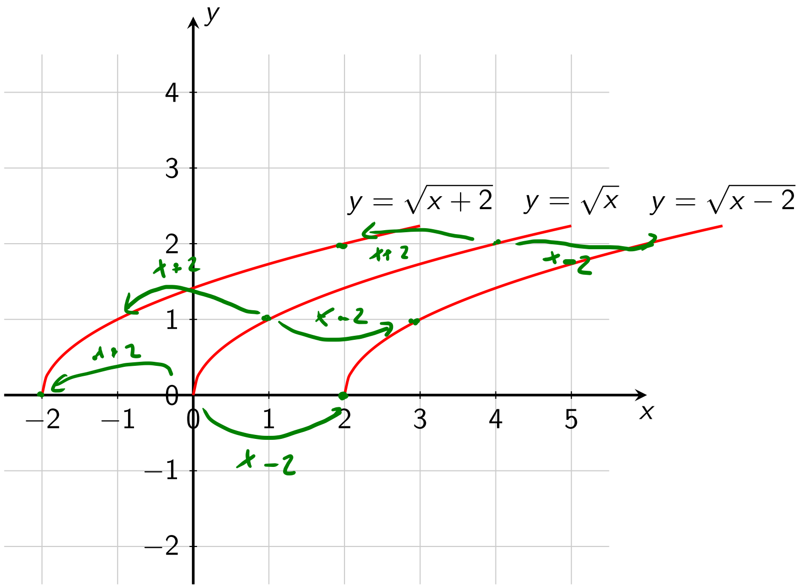
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x} \pm 2$



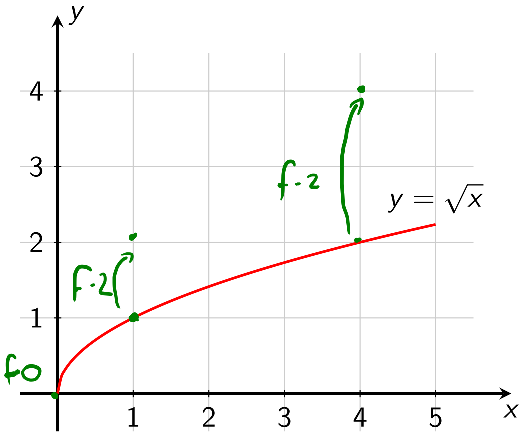
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{(x \pm 2)}$



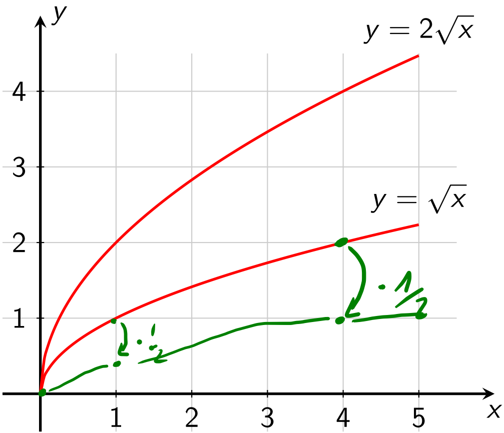
Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x \pm 2}$



Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$

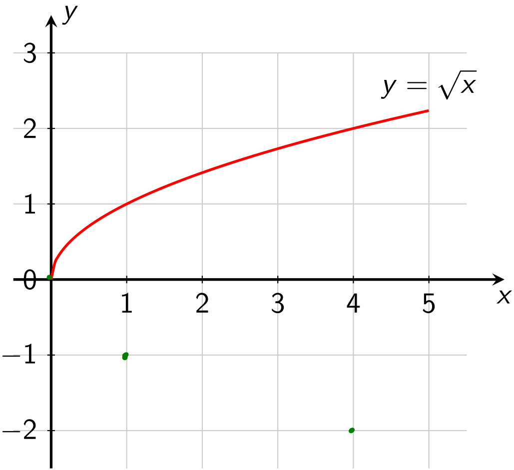


Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$

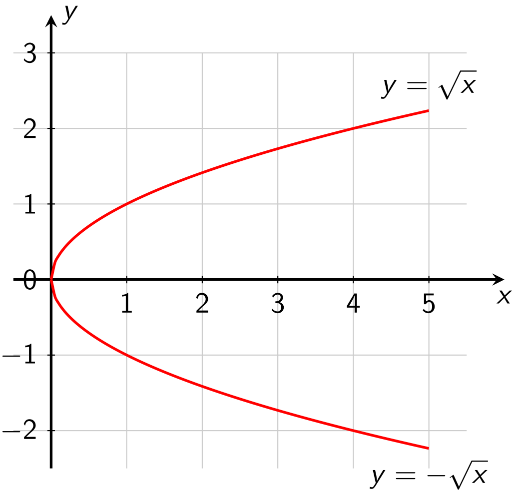


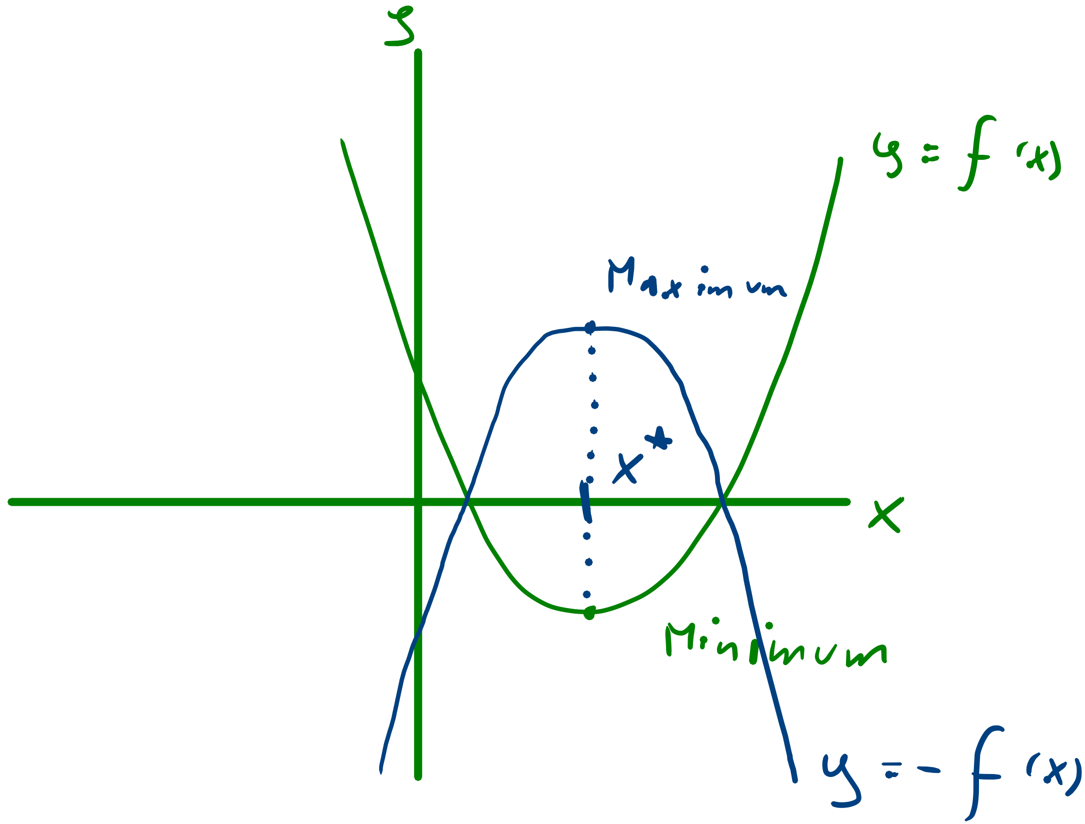
$\frac{1}{2}\sqrt{x}$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$

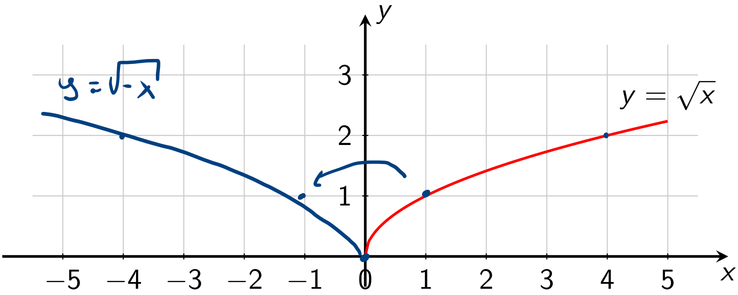


Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$

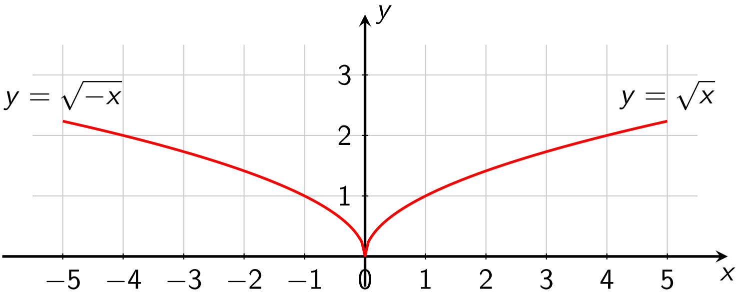



y
y = f(x)
Maximum
x*
x
Minimum
y = -f(x)

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$



Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$



Addition einer Konstanten

Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$y = f(x) + c$:

- $c > 0$: der Graph wird um c Einheiten nach oben verschoben.
- $c < 0$: der Graph wird um c Einheiten nach unten verschoben.

$y = f(x + c)$:

- $c > 0$: der Graph wird um c Einheiten nach links verschoben.
- $c < 0$: der Graph wird um c Einheiten nach rechts verschoben.

Multiplikation mit einer Konstanten

Allgemeine Regeln für die Verschiebung von Graphen

$y = cf(x)$:

- $|c| > 1$: der Graph wird vertikal gestreckt.
- $|c| < 1$: der Graph wird vertikal gestaucht.
- $c < 0$: der Graph wird an der x-Achse gespiegelt.

$y = f(cx)$:

- $|c| > 1$: der Graph wird horizontal gestaucht.
- $|c| < 1$: der Graph wird horizontal gestreckt.
- $c < 0$: der Graph wird an der y-Achse gespiegelt.

5.2 Neue Funktionen aus alten

5.2 Neue Funktionen aus alten: Summe und Differenz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Summe von f und g:

Die Funktion h, die durch $h(x) = f(x) + g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Summe** von f und g, wir schreiben $h = f + g$.

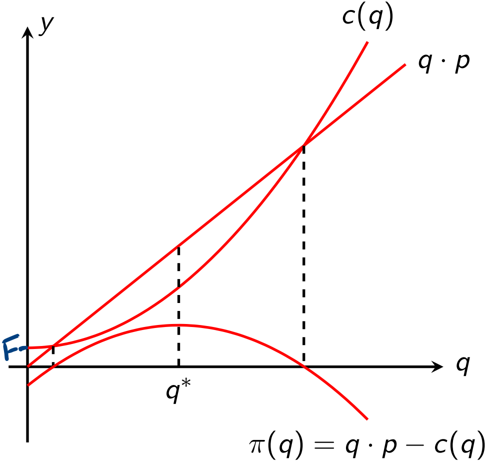
Differenz von f und g:

Die Funktion k, die durch $k(x) = f(x) - g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Differenz** von f und g, wir schreiben $k = f - g$.

Beispiel: Gewinn = Einnahmen – Kosten

Einnahmen: $q \cdot p$, wobei p Marktpreis und q Menge

Kosten: $c(q) = q^2 + F$ixkosten



5.2 Neue Funktionen aus alten: Produkt und Quotient

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Produkt von f und g:

Die Funktion h, die durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ definiert ist, bezeichnet man als die **Produkt** von f und g, wir schreiben $h = f \cdot g$.

Quotient von f und g:

Die Funktion k, definiert wo $g(x) \neq 0$, durch $k(x) = f(x)/g(x)$, bezeichnet man als den **Quotienten** von f und g und wir schreiben $k = f/g$.

Beispiel: Durchschnittskosten

Sei die Kostenfunktion $c : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ einer Firma, die $q \geq 0$ Einheiten produziert, gegeben durch

variable kosten Fix kosten

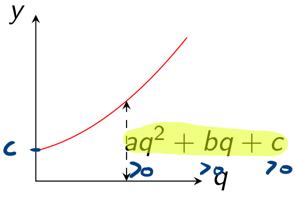
$$c(q) = \underline{\underline{a}}q^3 + bq^2 + cq + d\,.$$

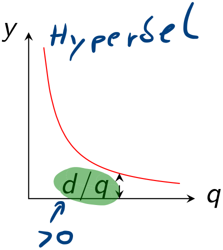
Die Durchschnittskosten $avc : \mathbb{R}_{>} \to \mathbb{R}$ sind dann mit $avc(q) = c(q)/q$ definiert durch

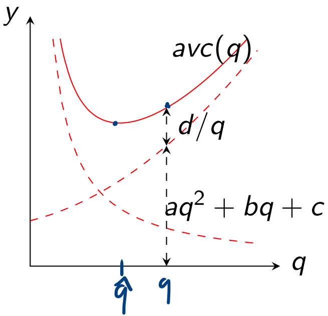
$$avc(q) = aq^2 + bq + c + \frac{d}{q}\,.$$

Der Teil $aq^2 + bq + c$ bezeichnet die durchschnittlichen variablen Kosten und der Teil $\frac{d}{q}$ bezeichnet die durchschnittlichen Fixkosten.

Durchschnittliche variable & fixe Kosten, Durchschnittskosten







Verkettung von Funktionen

Es sei $g : E \to D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $E, D \subseteq \mathbb{R}$.

Es wird zunächst die Funktion g auf ein Element x aus E angewendet. Der Funktionswert $g(x)$ ist dann ein Element aus D.

Schließlich wird f auf $g(x)$ angewendet, der Funktionswert $f(g(x))$ ist dann ein Element aus $\mathbb{R}$.

Wir schreiben

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ für } x \in E$$

Beispiel: Gewinnfunktion

Produktionsfunktion $f : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

$x \geq 0$: Input, $f(x) \geq 0$: Output $= q$

Kostenfunktion $c : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

$x \geq 0$: Input, $c(x) \geq 0$: Kosten

Preis-Absatzfunktion $p : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

$q \geq 0$: Output, $p(q) \geq 0$: Preis

Gewinnfunktion $\pi : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$

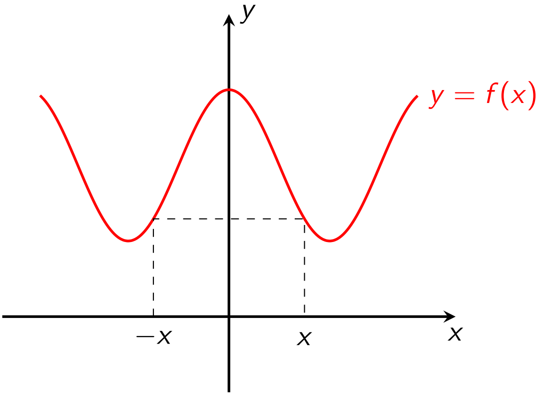
$x \geq 0$: Input, $\pi(x)$: Gewinn

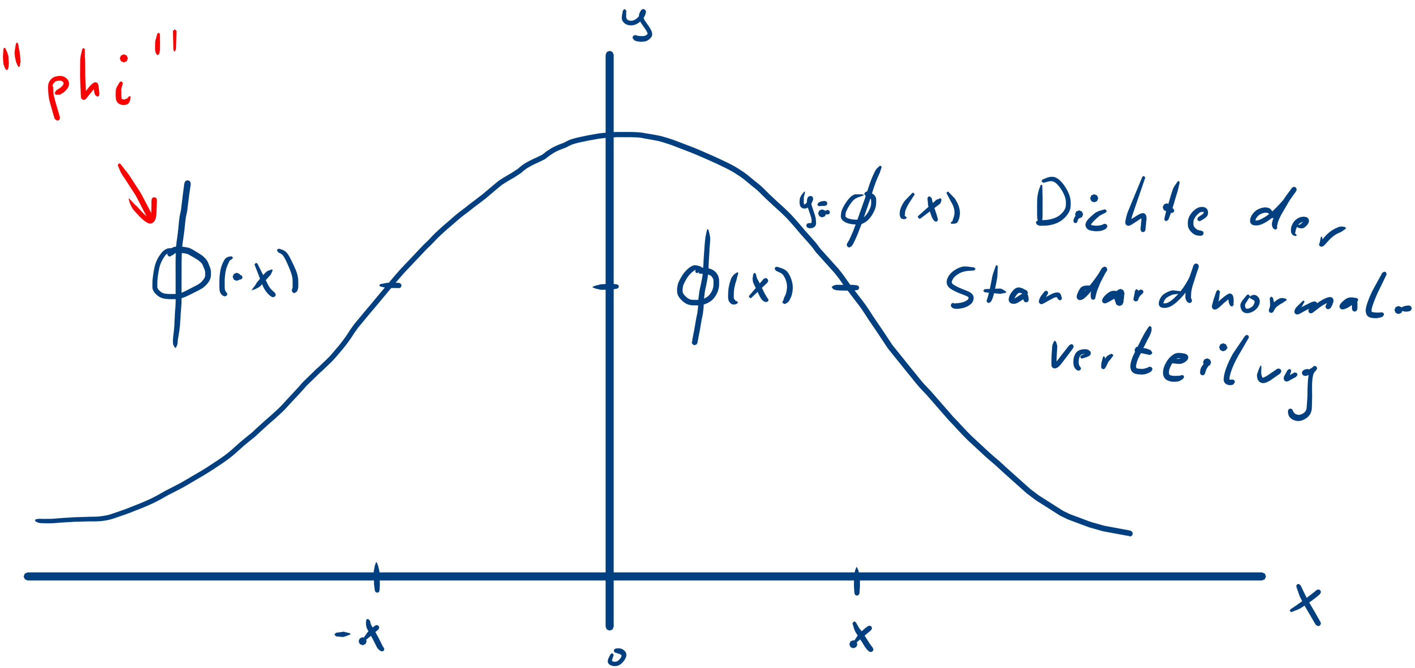
$$\pi(x) := (p \circ f)(x) \cdot f(x) - c(x) = \overbrace{\underbrace{p(\underbrace{f(x)}_{q})}_{\text{Verkettung}} \cdot \underbrace{f(x)}_{q}}^{\text{Erlös}} - \overbrace{c(x)}^{\text{Kosten}}$$

Definition: Symmetrie zur y-Achse

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn $f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in D$, ist f **symmetrisch zur y-Achse**.



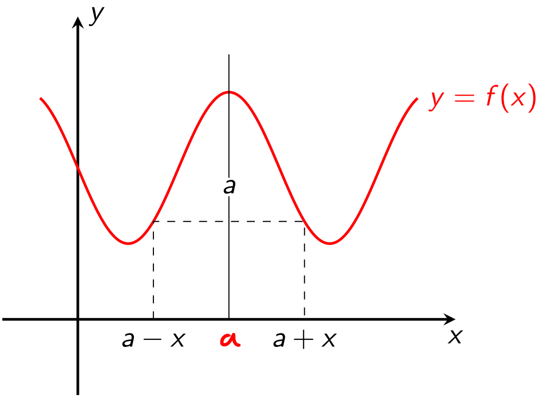

"phi"
y
$y = \phi(x)$
Dichte der Standardnormalverteilung
$\phi(-x)$
$\phi(x)$
-x
0
x
x

Definition: Symmetrie zur Geraden $x = a$

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

"für alle"

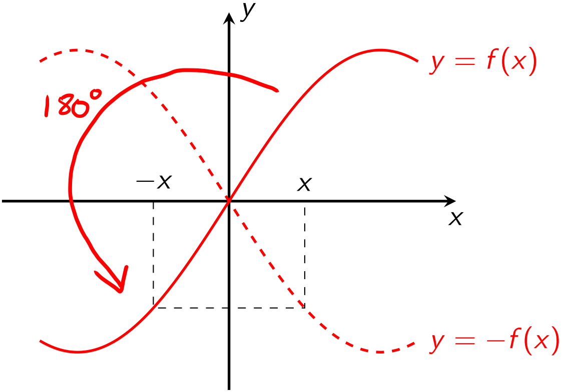
Wenn $f(a + x) = f(a - x)$ $\boxed{\forall}$ $x \in D$, ist f **symmetrisch zur Geraden** $x = a$.



Definition: Symmetrie zum Ursprung

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn $f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in D$, ist f **symmetrisch zum Ursprung**.



Symmetrie: Beispiel

$g(-x) = -3(-x)^4 + 2(-x)^2$

$= -3x^4 + 2x^2 = g(x)$ ✓

$f(a+x) = f(a-x)$

bzw. $f(x) = f(-x)$

→ y-Achse

Sind die Funktionen

$$f(x) = 4x^3$$

und

$$g(x) = -3x^4 + 2x^2$$

symmetrisch?

$(-1)(-1)(-1) = -$

$-f(x) = -4x^3 = \underbrace{4(-x)^3}_{f(-x)} = 4\underbrace{(-1)^3}_{!} \cdot x^3$

$= -4x^3 = -f(x)$

Punktsymmetrie

$-f(x) = f(-x)$

↷ Ursprung

5.3 Inverse Funktionen

Definition: Eins zu Eins oder umkehrbar eindeutig

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Der Wertebereich $R = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in D\}$ besteht aus allen Zahlen, die man erhält, wenn man x in D variiert.

bijektiv

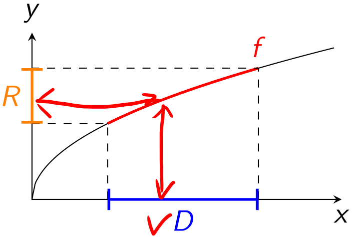
f ist **Eins zu Eins** oder **umkehrbar eindeutig** in D, wenn f niemals denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten aus D annimmt.

Für jedes $y \in R$ gibt es genau ein $x \in D$, so dass $y = f(x)$.

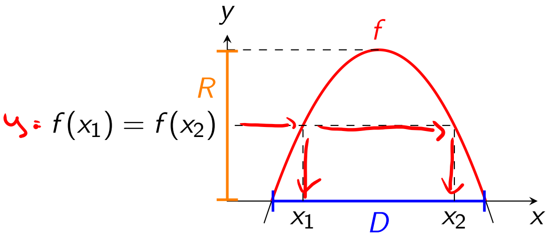
$\Leftrightarrow$

Wenn $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 \neq x_2$, dann gilt auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Beispiele



f ist umkehrbar eindeutig.



f ist nicht umkehrbar eindeutig.

Definition: Inverse Funktion f^{-1}

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und Wertebereich $R \subseteq \mathbb{R}$.

Genau dann, wenn f umkehrbar eindeutig ist, hat sie eine **inverse Funktion** $\underbrace{g}_{= f^{-1}}$ mit Definitionsbereich R und Wertebereich D. $g: R \to D$

Die Funktion g ist durch folgende Regel gegeben:

Für jedes $y \in R$ ist der Wert $g(y)$ die eindeutig bestimmte Zahl $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Dann gilt:

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \text{ (für } x \in D, y \in R)$$

Eine direkte Folgerung ist:

$$g(f(x)) = x \;\forall\; x \in D \text{ und } f(g(y)) = y \;\forall\; y \in R$$

zum Beispiel

$$f(x) = 2 \cdot x = x \cdot 2$$

$$f^{-1}(y) = y : 2 = y \cdot \frac{1}{2}$$

$$= y \cdot 2^{-1}$$

Beispiel: Inverse Nachfrage

$D(p(q)) = q$

Nachfragefunktion

$q = D(p) = 12 - \frac{4}{3}p$

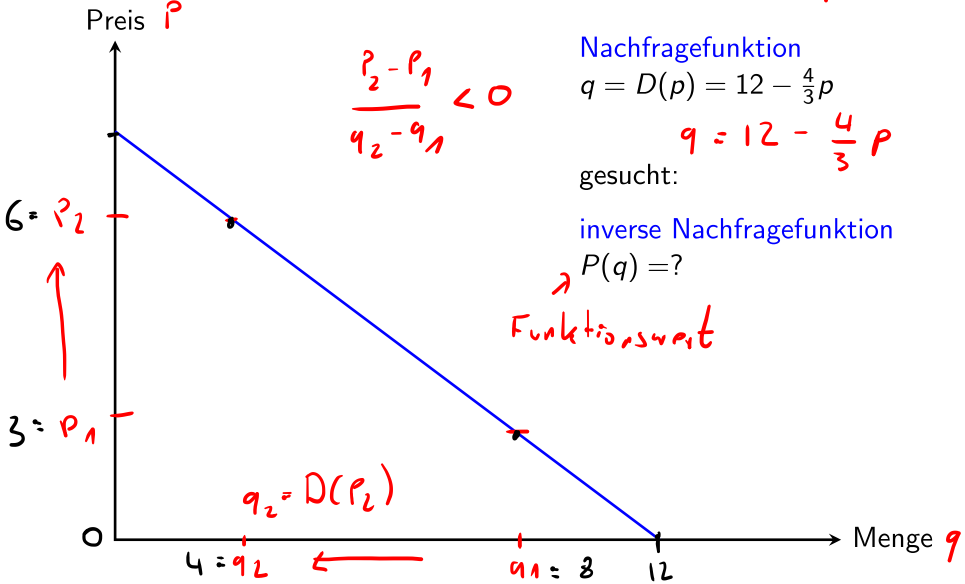
$q = 12 - \frac{4}{3}p$

gesucht:

inverse Nachfragefunktion

$P(q) = ?$

Funktionswert



$$q = 12 - \frac{4}{3}p \qquad \Big\| + \frac{4}{3}p - q$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}p = 12 - q \qquad \Big\| \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow p = 12 \cdot \frac{3}{4} - q \cdot \frac{3}{4}$$

Pause bis $\|^{00}$

$$= 3 \cdot 3 - q \cdot \frac{3}{4}$$

$$P(q) = 9 - q \cdot \frac{3}{4}$$

$D(p) = 12 - \frac{4}{3} p$ $\qquad$ $D(3) = 12 - \frac{4}{3} \cdot 3$

$P(q) = 9 - \frac{3}{4} q$ $\qquad$ $= 12 - 4 = 8$

Test:

$P(8) = 9 - \frac{3}{4} \cdot 8 = 9 - 3 \cdot 2 = 3$ ✓

$$D(P(q)) = 12 - \frac{4}{3} \boxed{P(q)} = 12 - \frac{4}{3}\left(\boxed{9 - \frac{3}{4} q}\right)$$

$$= 12 - \frac{4}{3} \cdot 9 - \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4} q\right)$$

$$= \underbrace{12 - 4 \cdot 3}_{=0} + \underbrace{\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4}}_{=1} q$$

$$q$$ ✓

$D(p) = 12 - \frac{4}{3} q$ -> lin. Funktion

=> D^{-1} auch linear

$P(q) = a \cdot q + b$

zwei Paare

$(q_1, p_1) = (8, 3)$

$(q_2, p_2) = (4, 6)$

$3 = a \cdot 8 + b$

$6 = a \cdot 4 + b \iff b = 6 - 4a$

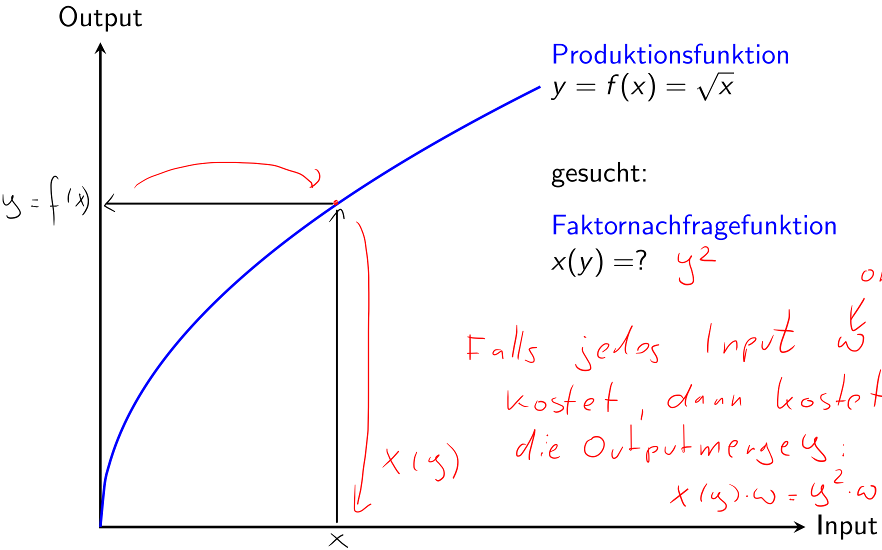
$3 = 8a + 6 - 4a = 4a + 6 \iff 4a = -3$

$\iff a = -\frac{3}{4}$

$b = 6 - 4\left(-\frac{3}{4}\right) = 6 + 3 = 9$

$P(q) = 9 - \frac{3}{4} q$

Beispiel: Faktornachfrage



Produktionsfunktion
$y = f(x) = \sqrt{x}$

gesucht:

Faktornachfragefunktion
$x(y) = ?$ y^2

omega

Falls jedes Input ω kostet, dann kostet die Outputmenge y:

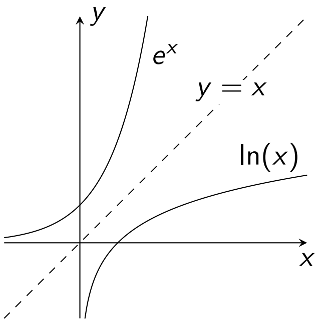
$x(y) \cdot \omega = y^2 \cdot \omega$

Symmetrie inverser Funktionen

Wenn zwei Funktionen f und g Inverse zu einander sind, dann sind die Graphen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$.

(Die Einheiten auf den Koordinatenachsen müssen diesselben sein.)

Beispiel:



5.4 Graphen von Gleichungen

5.4 Graphen von Gleichungen

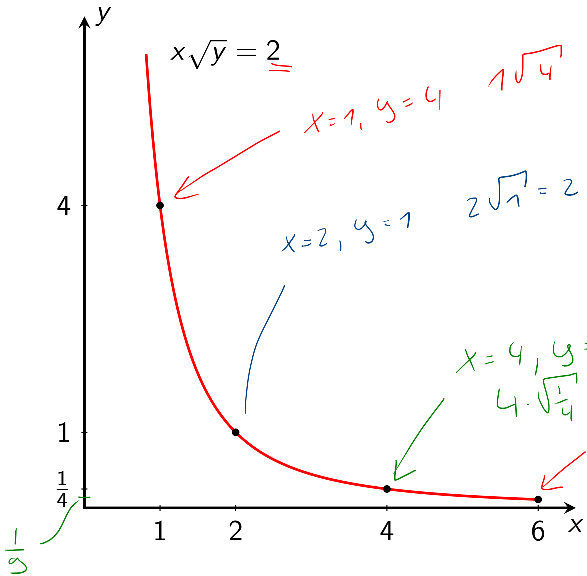
Betrachtet sei eine beliebige Gleichung mit den beiden Variablen x und y.

Eine **Lösung** ist ein Tupel (a, b), sodass die Gleichung an der Stelle $(x, y) = (a, b)$ erfüllt ist.

Die **Lösungsmenge** ist die Menge **aller** Tupel (a, b), die die Gleichung erfüllen.

Der **Graph** ist die Darstellung der Lösungsmenge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Beispiele: Indifferenzkurven



$x = 1, y = 4 \quad 1\sqrt{4} = 2$ ✓

$x = 2, y = 1 \quad 2\sqrt{1} = 2$ ✓

$x = 4, y = \frac{1}{4}$

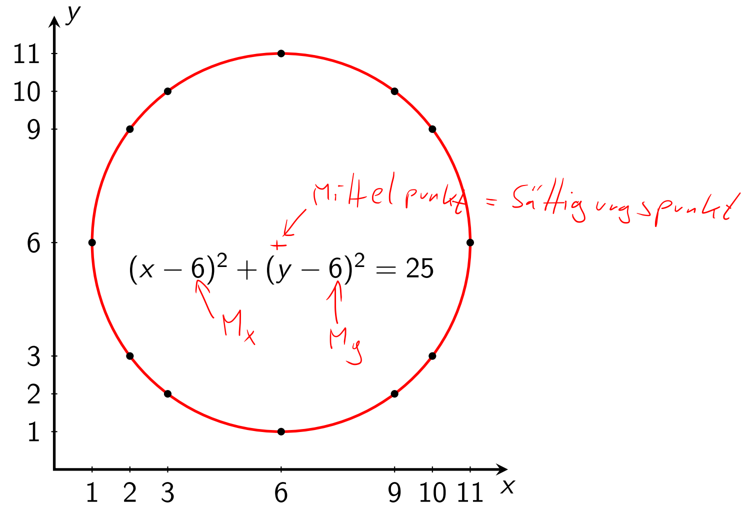
$4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ ✓

$x = 6 \quad y = \frac{1}{9}$

$6 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} =$

$6 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

Beispiele: Indifferenzkurven



5.5 Abstand in der Ebene

Definition: Abstandsformel

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist

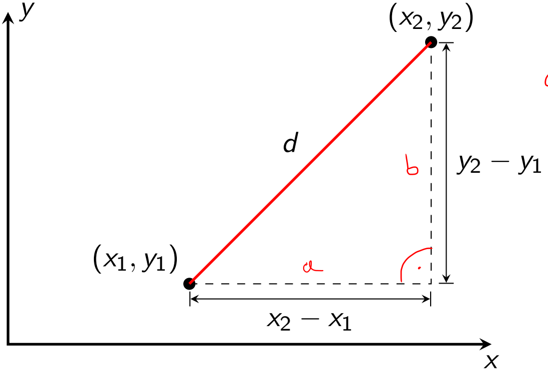
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|x_2 - x_1| = \begin{cases} x_2 - x_1 & ; x_2 \geq x_1 \\ x_1 - x_2 & ; x_2 < x_1 \end{cases}$$

$$d(x_2, x_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

Pythagoras:

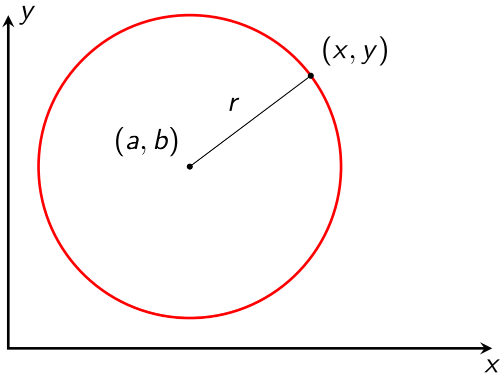
$$d^2 = a^2 + b^2$$



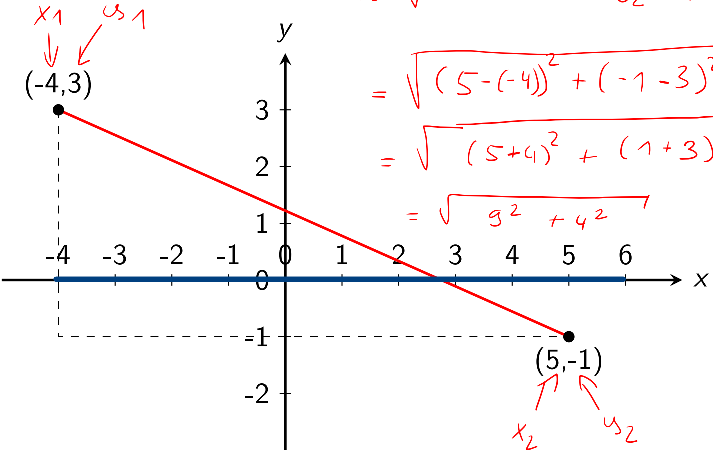
Definition: Kreisgleichung

Die **Gleichung eines Kreises** mit **Mittelpunkt** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und **Radius** $r \in \mathbb{R}$ ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Beispiel: Abstand in der xy-Ebene



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

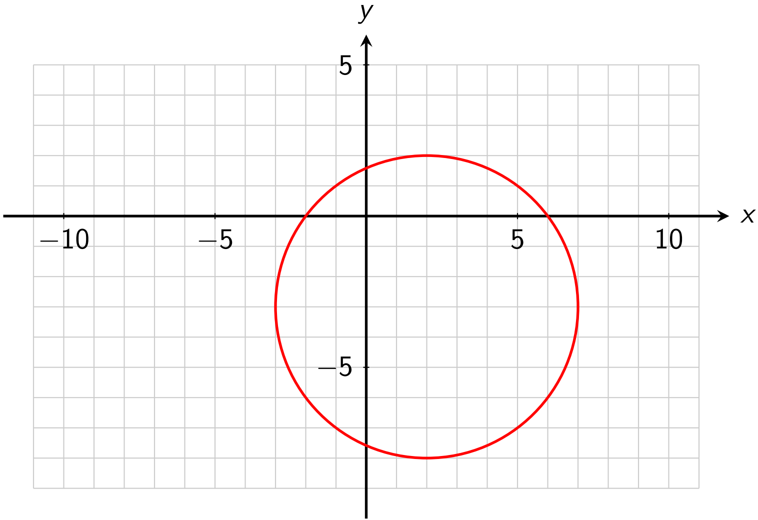
$$= \sqrt{(5-(-4))^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{(5+4)^2 + (1+3)^2}$$

$$= \sqrt{9^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \approx 10$$

Wie lautet die Kreisgleichung?



Zusammenfassung

- Verschiebung von Graphen
  $f(x) + c$: vertikal, $f(x + c)$: horizontal
  $-f(x)$: Spiegelung x-Achse, $f(-x)$: Spiegelung y-Achse
- Verknüpfung von Funktionen
  Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Verkettung
- Inverse Funktionen
  umkehrbar eindeutig, Symmetrie mit $x = y$
- Graphen von Gleichungen
- Abstand in der Ebene
  Euklidischer Abstand, Kreisgleichung