Vorlesung zu Kapitel 04:[1]

Funktionen einer Variablen

Moodle

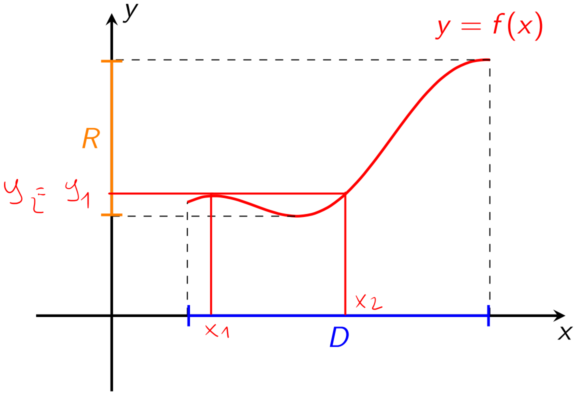
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

4.2 Definitionen

Definition: Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

Eine (reellwertige) **Funktion** einer reellen Variablen x mit **Definitionsbereich** D ist eine Regel $x \mapsto f(x)$, die jeder Zahl x in D eine eindeutige reelle Zahl $f(x)$ zuordnet. Die Menge der Werte $f(x)$, die man erhält, wenn x im Definitionsbereich variiert, nennt man den **Wertebereich** R von f.



Definition: (strikt) monoton wachsend

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

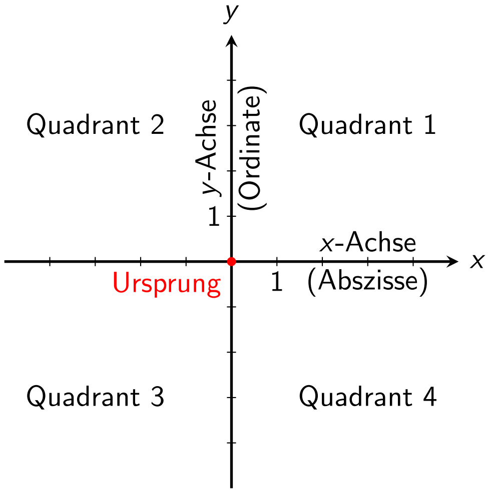
Die Funktion f heißt **monoton wachsend**, wenn für $x_1, x_2 \in D$ aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **strikt monoton wachsend**, wenn für $x_1, x_2 \in D$ aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \boxed{<} f(x_2)$.

Monoton fallend und **strikt monoton fallend** ist entsprechend definiert.

4.3 Graphen von Funktionen

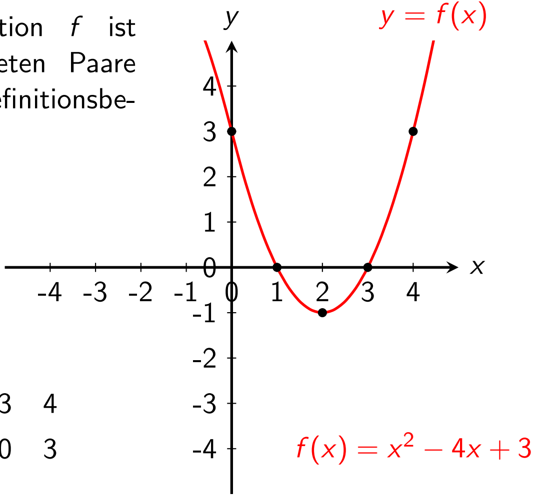
Koordinatensystem



Wir nennen dieses Koordinatensystem auch xy-Ebene oder $\mathbb{R}^2$.

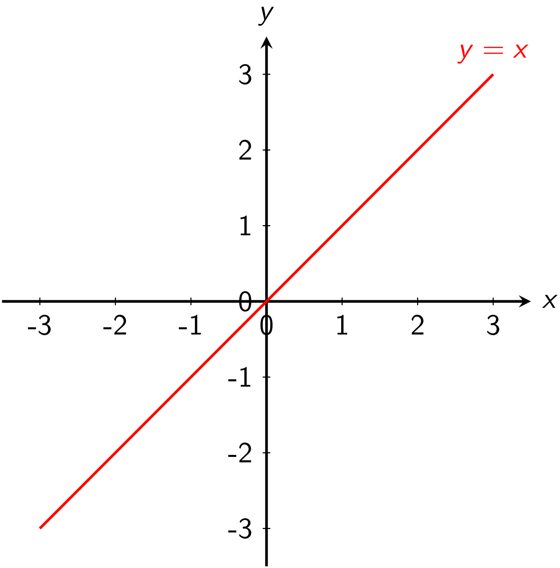
Graph

Der **Graph** einer Funktion f ist die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$, wobei x zum Definitionsbereich von f gehört.

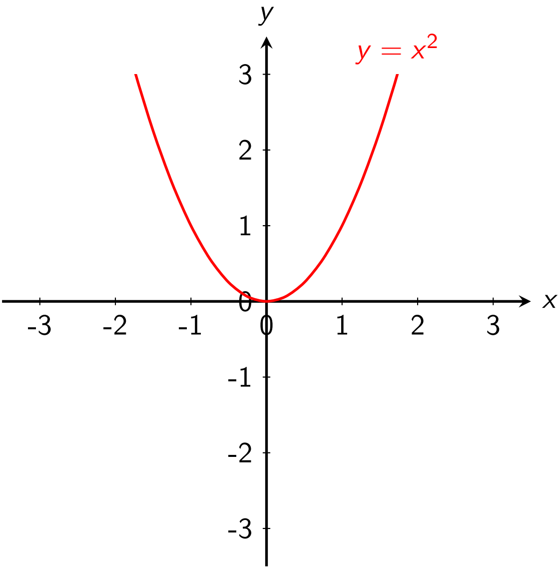


x	0	1	2	3	4
$y =$ $f(x)$	3	0	-1	0	3

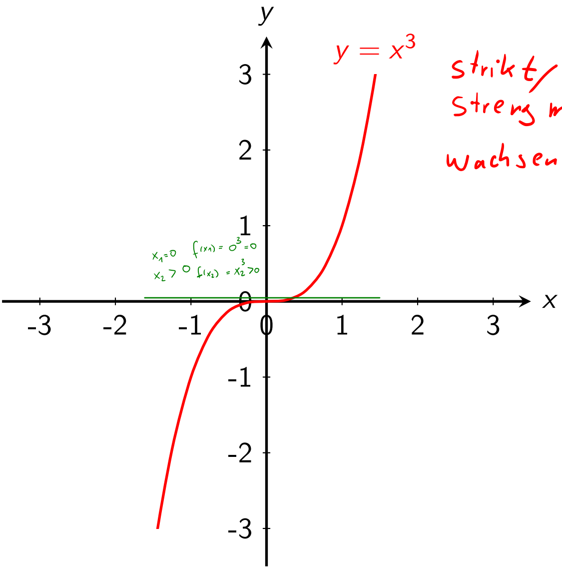
Wichtige Graphen: $f(x) = x$



Wichtige Graphen: $f(x) = x^2$

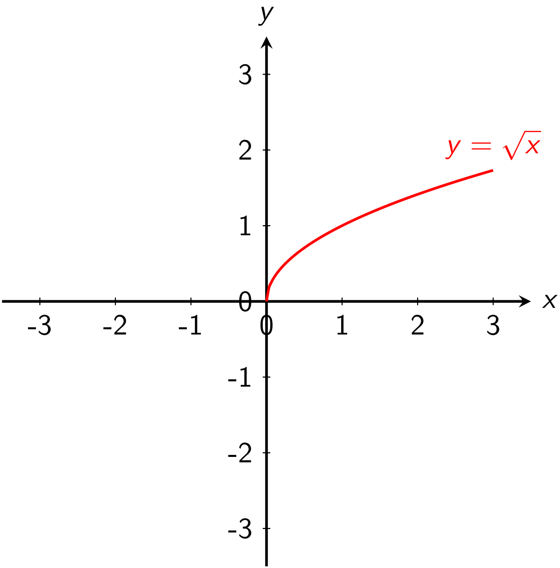


Wichtige Graphen: $f(x) = x^3$

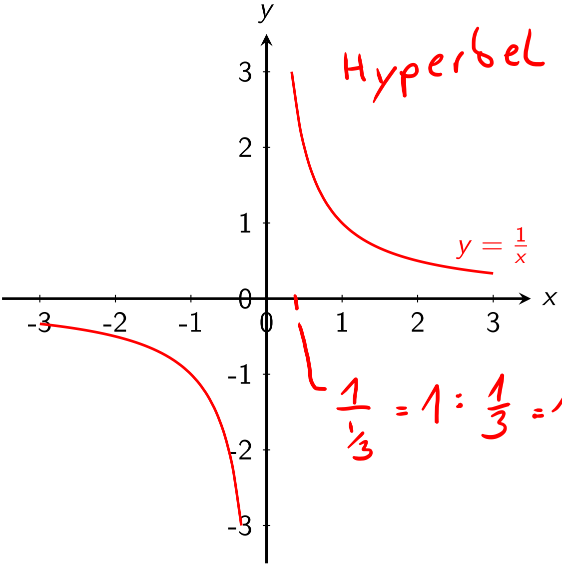


strikt/
streng monoton
wachsend

Wichtige Graphen: $f(x) = \sqrt{x}$

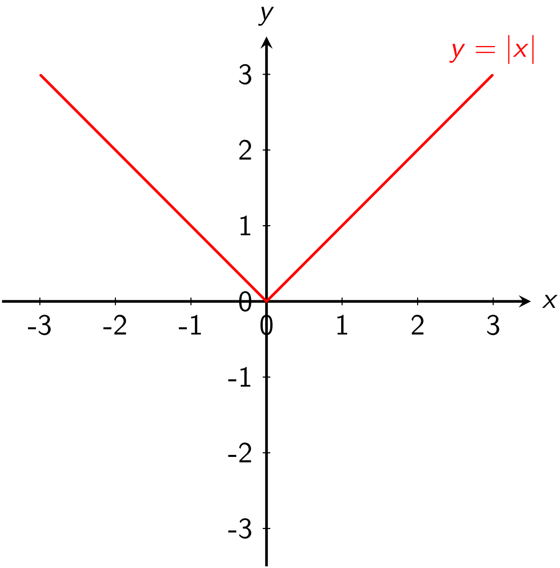


Wichtige Graphen: $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$



$\frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 : \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$

Wichtige Graphen: $f(x) = |x|$



4.4 Lineare Funktionen

4.4 Lineare Funktionen

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b$$

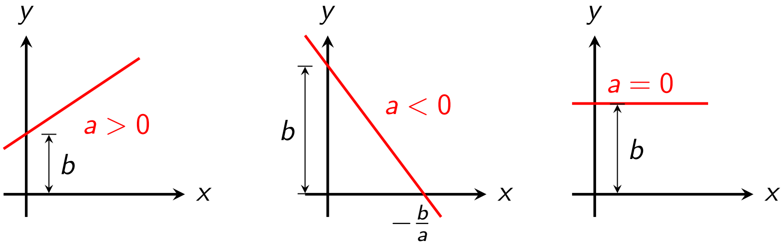
$$= f(x) + a$$

$f(x)$

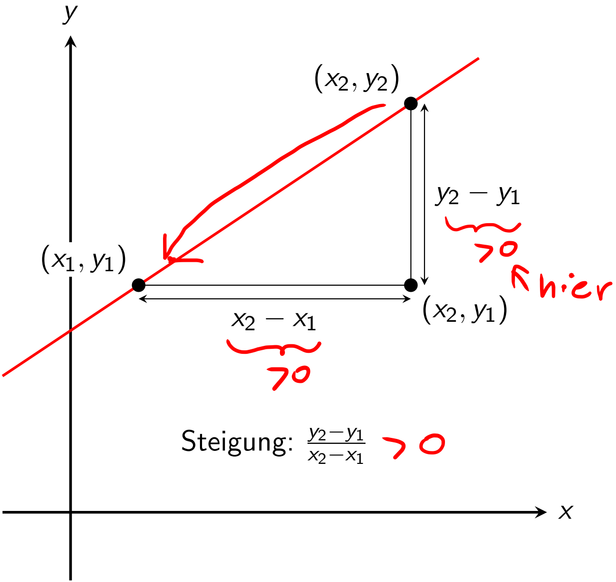
$$f(x) = a \cdot x + b \qquad a, b, x \in \mathbb{R}$$

a: Steigung

b: y-Achsenabschnitt



Lineare Funktionen: Berechnung der Steigung



Steigung: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} > 0$

Lineare Funktionen: Punkt-Steigungsformel einer Geraden

$$f(x) = a \cdot x + b \qquad\qquad a, b, x \in \mathbb{R}$$

Die **Steigung** einer Geraden ist

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2 \ ,$$

wobei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden sind.

Funktionsgleichung:

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow (x - x_1)\, a = y - y_1$$

Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1) ist

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y = ax \overbrace{- ax_1 + y_1}^{b}$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

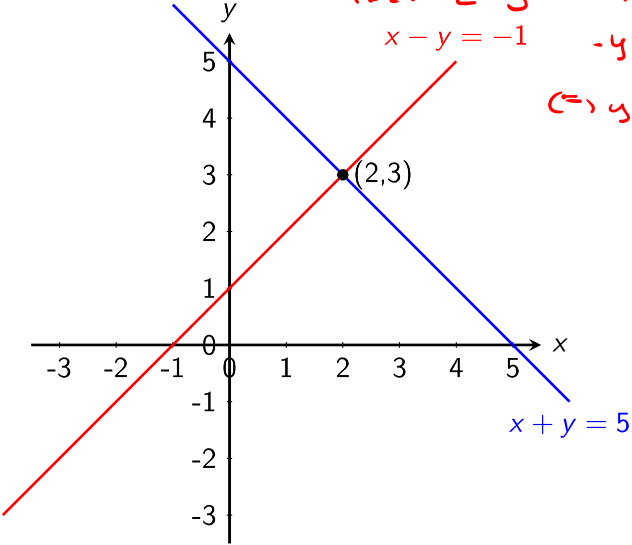
Grafische Lösungen von linearen Gleichungen

Jede lineare Gleichung repräsentiert eine Gerade.

Erfüllt ein geordnetes Paar (x, y) eine lineare Gleichung, so liegt es auf der entsprechenden Geraden.

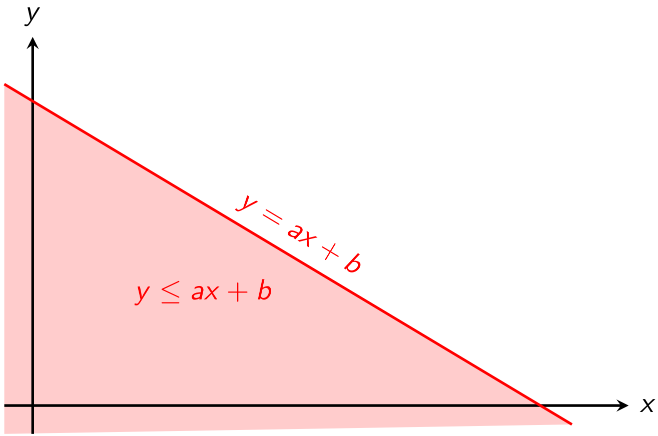
Erfüllt ein geordnetes Paar (x, y) mehrere lineare Gleichungen, so liegt es auf all den entsprechenden Geraden.

Grafische Lösungen von linearen Gleichungen



$x=2: \quad 2-y=-1 \iff$
$-y=-3$
$\iff y=3$

Grafische Darstellung linearer Ungleichungen



Budgetmenge

(x,y) Güterbündel $x \geq 0$: Menge Rotwein

$y \geq 0$: Menge Baguette

(P_x, P_y): $P_x > 0$: Preis für Rotwein

$P_y > 0$: -''- Baguette

m : Geld

wert von (x,y) Budget

$$P_x \cdot x + P_y \cdot y \leq m \quad || - P_x \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad P_y \cdot y \leq m - P_x \cdot x \quad || : P_y$$

$$\Leftrightarrow \quad y \leq \underbrace{\frac{m}{P_y}}_{b} \underbrace{- \frac{P_x}{P_y}}_{a} \cdot x$$

4.6 Quadratische Funktionen

4.6 Quadratische Funktionen

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$

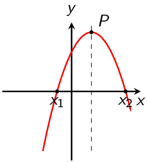
A Für welche Werte von x (falls es welche gibt) ist $ax^2 + bx + c = 0$?

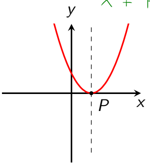
B Welches sind die Koordinaten des Maximums-/Minimumpunktes P?

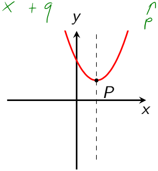
Parabeln: Graphen von $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$x^2 + px + q$

$p \qquad q$







$a < 0,\ b^2 > 4ac$	$a > 0,\ b^2 = 4ac$	$a > 0,\ b^2 < 4ac$
$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$	$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$	$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$

Nullstellen:

$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	keine

Scheitelpunkt:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + c \ \checkmark$$

Marktpreis (gegeben): p const

Kostenfuntion: $c(q) = 2q + \frac{1}{2} \cdot q^2$ mit $q \geq 0$

Gewinnfunktion: ↑quantity

$\pi(q) = \underbrace{p \cdot q}_{\text{Erlös}} - \underbrace{c(q)}_{\text{Kosten}} = pq - \frac{1}{2}q^2 - 2q = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a} q^2 + \underbrace{(p-2)}_{b} q + \underbrace{0}_{c}$

$\Rightarrow q^*(p) = -\frac{b}{2a} = -\frac{p-2}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{p-2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = p-2$ Fallunterscl.

$\Rightarrow \pi(q^*(p)) =$

$q^*(p) = \begin{cases} p-2, & \text{falls } p \geq 2 \\ 0, & \text{falls } p < 2 \end{cases}$ Maximalstelle liegt auf q-Achse

$\pi(q^*(p)) = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{(p-2)^2}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} + 0$

$= \begin{cases} \frac{(p-2)^2}{2} & \text{falls } p \geq 2 \\ 0 & \text{falls } p < 2 \end{cases}$

Abkürzung

$\pi(q) = p \cdot q - \frac{1}{2}q^2 - 2q$

$= q\left(p - \frac{1}{2}q - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad q = 0$ oder $p - \frac{1}{2}q - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad p - 2 = \frac{1}{2}q$

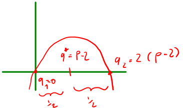
$\Leftrightarrow \quad q = 2(p-2)$

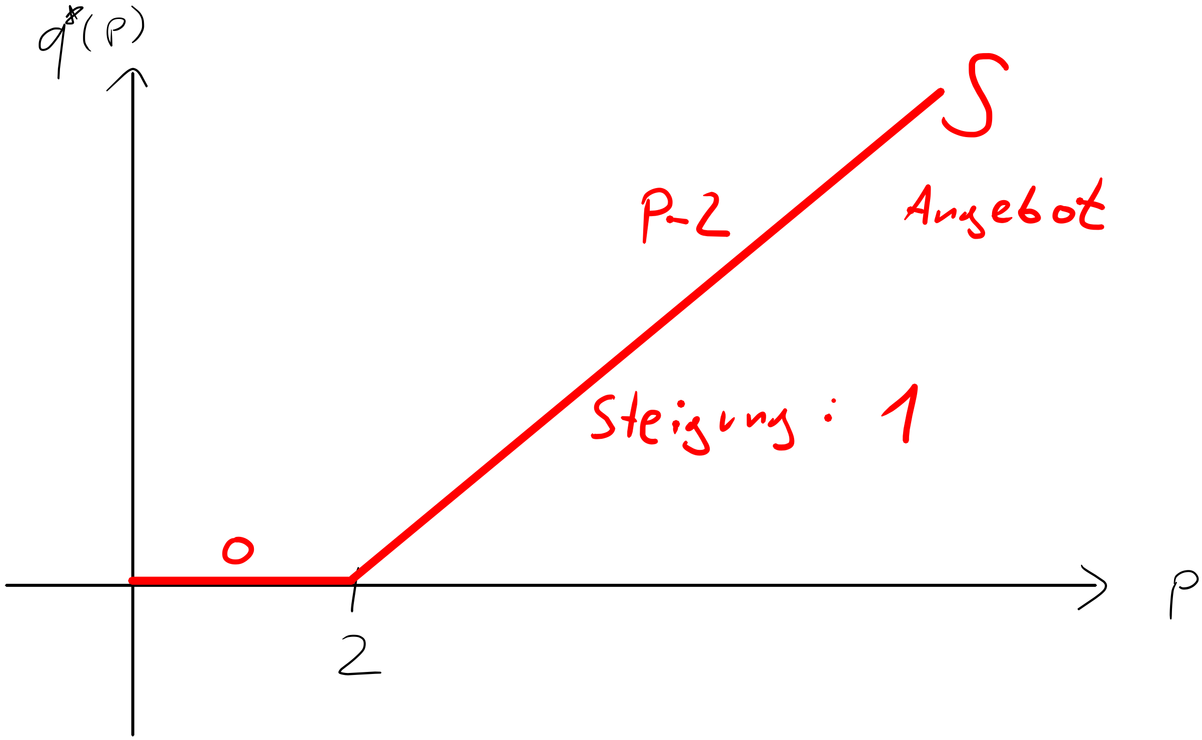
Nullstellen $q_1 = 0$, $q_2 = 2(p-2)$

Maximalstelle liegt in der Mitte

$q^* = \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} 2(p-2)$

$= p-2$





q*(p)
S
p-2
Angebot
Steigung: 1
0
2
p

Pause bis
10 $\underline{55}$

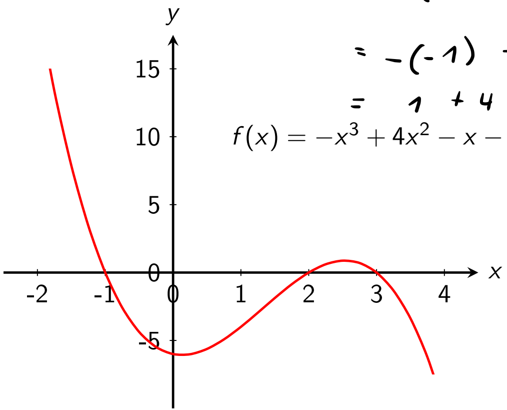
4.7 Polynome

Polynom vom Grad $n = 3$: Kubische Funktionen

$$x = -1: \quad -(-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) - 6$$

$$= -(-1) + 4 \cdot 1 + 1 - 6$$

$$= 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$



Definition: Allgemeines Polynom

Die Funktion P, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^{1} + a_0 x^{0},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind mit $a_n \neq 0$, heißt das **allgemeine Polynom vom Grade** n mit den **Koeffizienten** $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Die Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

heißt die **allgemeine Gleichung** n**-ter Ordnung**.

Wurzeln und Extremstellen eines allgemeinen Polynoms

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die das allgemeine Polynom P den Wert null annimmt, also $P(x) = 0$ gilt, heißt **Wurzel** von P.

Nullstelle ($y = 0$)

Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ kann <u>höchstens</u> n verschiedene (reelle) Wurzeln haben.

Der Graph eines Polynoms n-ten Grades kann <u>höchstens</u> $n - 1$ **Extrempunkte** haben.

$\overbrace{(x^{50})^2}^{\geq 0}$

Beispiel:

$$P(x) = x^{100} + \overset{\geq 0}{1} > 0$$

(Ein Extrempunkt, keine Nullstelle)

Das Polynom $P(x)$ hat den Faktor $x - a \Leftrightarrow P(a) = 0$.

$P(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 50$
$= 125 - 75 - 50 = 0$

Beispiel:

$x - 5$ ist ein Faktor des Polynoms $P(x) = x^3 - 3x^2 - 50$.

$x^3 - 3x^2 - 50 = (x-5)(\underset{?}{\ldots}) \quad \| : (x-5)$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 0x^1 - 50 : (x-5) = \underline{x^2 + 2x + 10}$
$x^3 - 5x^2$
$2x^2 + 0x^1$
$2x^2 - 10x$
$10x - 50$
$10x - 50$
0

$-3x^2 - (-5x^2)$
$= -3x^2 + 5x^2 = 2x^2$

$x^3 - 3x^2 - 50 = (x-5)\overbrace{(x^2 + 2x + 10)}^{\text{Polyn. 2. Grades}}$

$\underbrace{x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1}_{} + 9$

$\underbrace{\underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{9}_{> 0}}_{> 0}$

4.8 Potenzfunktionen

Potenzfunktion

Die allgemeine **Potenzfunktion** f ist für $x > 0$ definiert durch die Formel

$$f(x) = Ax^r \ ,$$

wobei $A, r \in \mathbb{R}$.

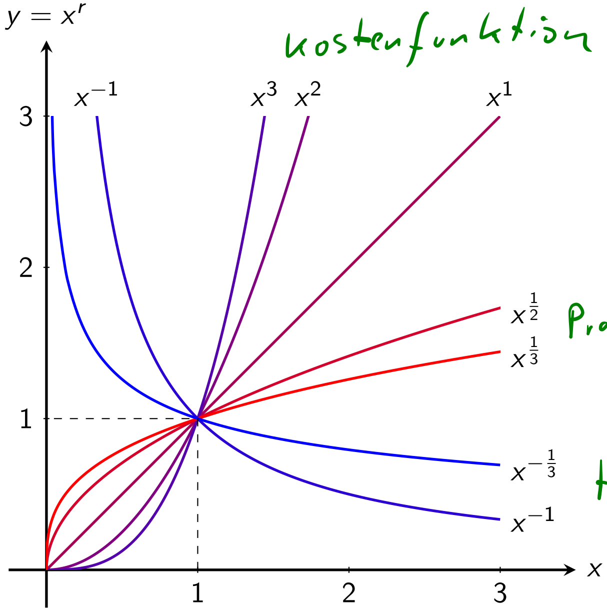
Beispiel

$f(x) = Ax^r$ Produktionsfunktion $0 < r < 1$

Menge des Inputs

Graphen von Potenzfunktionen

kostenfunktion



Prdf.

Höhenlinien

4.9 Exponentialfunktionen

Die allgemeine Exponentialfunktion

Die **allgemeine Exponentialfunktion** mit der Basis $a > 0$ ist

$$f(x) = Aa^x \ ,$$

wobei $A, a \in \mathbb{R}$ und a der Faktor ist, mit dem sich $f(x)$ ändert, wenn x um 1 steigt.

Falls $a = \underline{1 + p/100}$, wobei $p > 0$ und $A > 0$, dann wird $f(x)$ um $p\%$ anwachsen für jedes Wachstum von x um 1 Einheit.

Falls $a = 1 - p/100$, wobei $0 < p < 100$ und $A > 0$, dann wird $f(x)$ abnehmen um $p\%$, wenn x um 1 steigt.

% Veränderung von f

$(a-1) \cdot 100\,\%$

$= (1 + p/100 - 1) \cdot 100\,\% = \frac{p}{100} \cdot 100\,\% = p\,\%$

$f(x) = A \cdot a^x$

$f(x+1) = A \cdot a^{x+1} = \underbrace{A \cdot a^x}_{f(x)} \cdot a^1$

$= f(x) \cdot a$

absolute Veränderung von f

$f(x+1) - f(x) = f(x) \cdot a - f(x)$

$= f(x)(a-1)$

relative Veränderung von f

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x)(a-1)}{f(x)} = a-1$$

Beispiel $a = \frac{3}{2}$

x steigt um 1 $\rightarrow$ $f(x)$ steigt auf

$\frac{3}{2} f(x)$

bzw. $f(x)$ steigt um

50 %

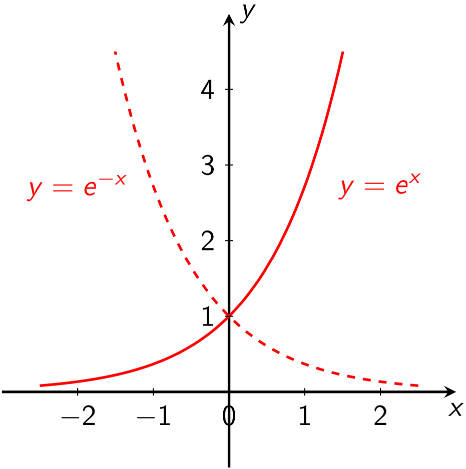
$\Big(\underbrace{\tfrac{3}{2} - 1}_{\frac{1}{2}}\Big) \cdot 100\,\% \xrightarrow{?} 50\,\%$

Die natürliche Exponentialfunktion

Die zur Basis e gehörige Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \text{ (mit } e = 2,71828...)$$

wird **die natürliche Exponentialfunktion** genannt.



4.10 Logarithmusfunktionen

Definition: Natürlicher Logarithmus

$e^{\ln(1)} = 1 = e^0$

$\Rightarrow \ln(1) = 0$ ✓

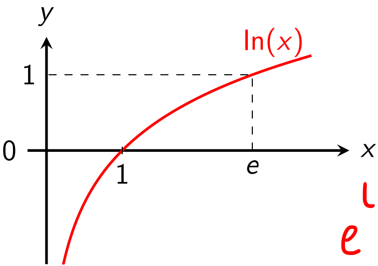
Für jede positive Zahl $b \in \mathbb{R}_>$ ist

$$e^{\ln(b)} = b\ .$$

Daher ist $\ln(b)$ der Exponent, mit dem e potenziert werden muss, um b zu erhalten.

$e^{\ln(e)} = e^1$

$\Rightarrow \ln(e) = 1$



$e^{\ln(e^2)} = ?$

$\Rightarrow \ln(e^2) = ?$

Regeln für die natürliche Logarithmusfunktion ln

Seien x und y positiv:

a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c) $\ln(x^p) = p\ln(x)$

d) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

e) $x = e^{\ln(x)}$

f) und für beliebiges x gilt $\ln(e^x) = x$

$f(x) = A x^r$

$\underbrace{\ln(f(x))}_{y} = \ln(A \cdot x^r)$

a)

$= \ln(A) + \ln(x^r)$

c)

$= \underbrace{\ln(A)}_{\text{"b"}} + \underbrace{r}_{\text{"a"}} \underbrace{\ln(x)}_{\tilde{x}}$

$y = \text{"b"} + \text{"a"}\ \tilde{x}$

Zusammenfassung

- Definitions- und Wertebereich, Monotonie
- Graphen von Funktionen
- Lineare Funktionen:
  Berechnung der Steigung
- Polynome:
  Quadratische & kubische Funktionen, allgemeines Polynom
  Wurzeln, Extrempunkte, Faktorzerlegung
- Potenzfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen