Vorlesung zu Kapitel 03:[1]

Gleichungen Lösen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

3.1 Gleichungen lösen

3.1 Gleichungen lösen

Eine Gleichung lösen bedeutet, alle Werte einer Variablen zu finden, für die die Gleichung erfüllt ist.

$$3x + 10 = x + 4$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $x = -3$.

Äquivalente Gleichungen

Um äquivalente Gleichungen zu erhalten, sind die folgenden Operationen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens erlaubt:

(A) Addition oder Subtraktion derselben Zahl

(B) Multiplikation mit derselben oder Division durch dieselbe Zahl $\neq 0$

$$3x + 10 = x + 4 \quad \| -10$$

$$\Leftrightarrow 3x + 10 - 10 = x + 4 - 10$$

$$\Leftrightarrow 3x = x - 6 \quad \| -x$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = x - 6 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = -6 \quad \| :2$$

$$\Leftrightarrow 2x : 2 = -6 : 2$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Test: $\frac{-2+2}{-2-2} - \frac{8}{(-2)^2-2(-2)} = \frac{2}{-2}$

$\frac{0}{4} - \frac{8}{4+4} = -1$ ✓

Beispiel 3.1.3

Löse die Gleichung

für $x \neq 0$, $x \neq 2$

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{2}{x} \quad \| \cdot (x-2)$$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2}(x-2) - \frac{8}{x^2-2x}(x-2) = \frac{2}{x}(x-2)$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} - \frac{8(x-2)}{\underbrace{x^2-2x}_{x(x-2)}} = \frac{2(x-2)}{x}$

$\Leftrightarrow x+2 - \frac{8\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{2(x-2)}{x}$

$\Leftrightarrow x+2 - \frac{8}{x} = \frac{2(x-2)}{x} \quad \| \cdot x$

$\Leftrightarrow (x+2)x - \frac{8}{x}x = \frac{2(x-2)}{x} \cdot x$

$\Leftrightarrow (x+2)x - 8 = 2(x-2)$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8 = 2x-4 \quad \| -2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 8 = -4 \quad \| +8$

$\Leftrightarrow x^2 = -4+8 = 4 \quad \| \sqrt{}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=2}$ oder $\boxed{x=-2}$ Lösung

fällt weg, da eingangs verboten

$a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a=b \text{ oder } a=-b)$

3.2 Gleichungen und ihre Parameter

3.2 Gleichungen und ihre Parameter

Möchte man einen Zusammenhang allgemein durch eine Gleichung darstellen, verwendet man **Parameter**.

Parameter können verschiedene aber „feste“ Werte annehmen.

Man erhält Spezialfälle, wenn für die Parameter konkrete Zahlen eingesetzt werden.

Variablen

Die Gleichung

$$y = a \cdot x + b$$

Parameter

beschreibt alle linearen Zusammenhänge mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

Versteht man $y = a \cdot x + b$, so kann man schnell auf alle linearen Spezialfälle schließen.

Gleichungen und ihre Parameter: Beispiel 3.2.1

Ein makroökonomisches Modell (in struktureller Form):

$$(i)\ Y = C + \bar{I} \text{ und } (ii)\ C = a + bY$$

Y: Bruttoinlandsprodukt, C: Konsum, $\bar{I}$: Investitionen (gegeben)

a, b: Parameter mit $a, b > 0$ und $b < 1$.

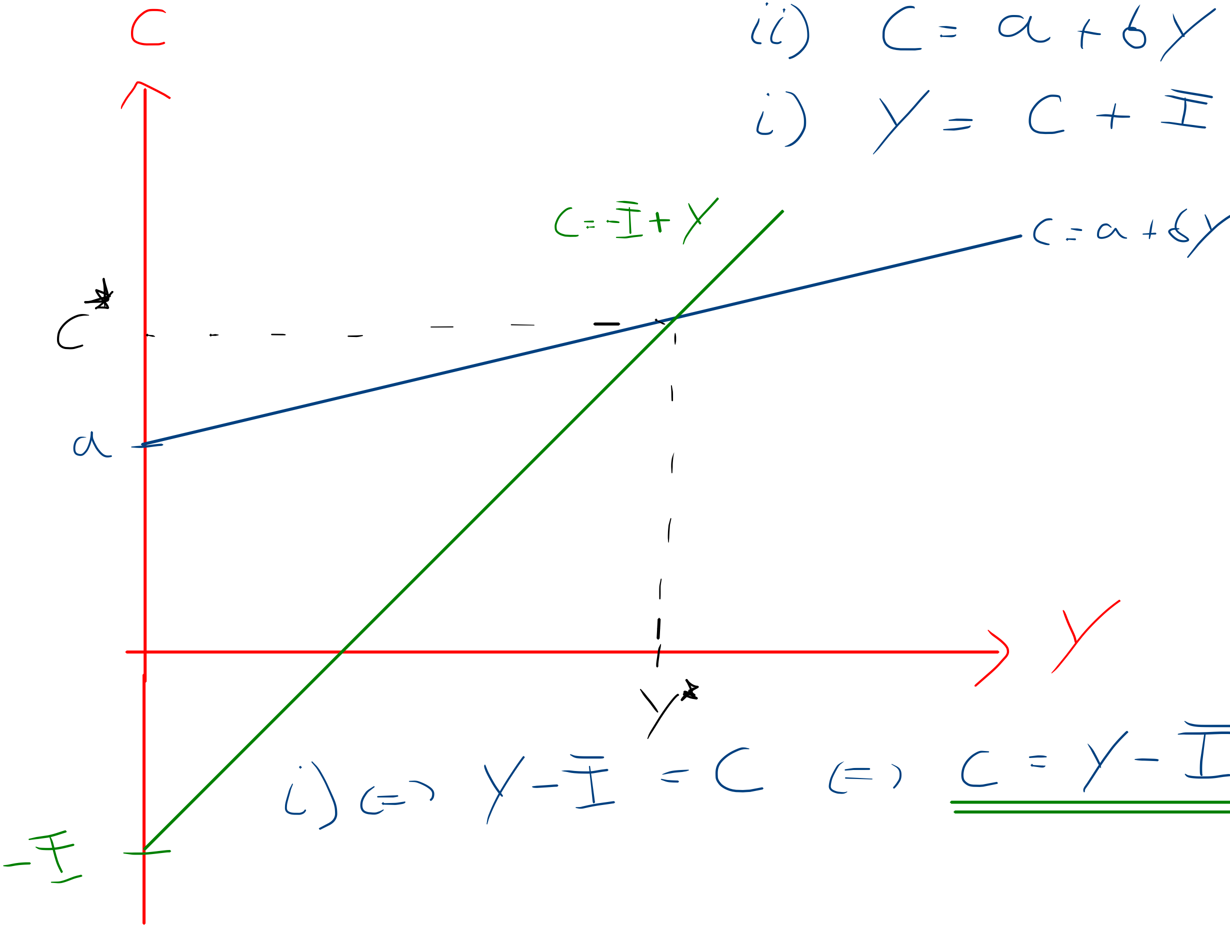
Gleichung (i):
Definition des BIP als Summe von Konsum und Investitionen

Gleichung (ii):
vereinfachende Annahme $\rightarrow$ Konsum ist linear im BIP

Gesuchte Lösung: Y und C in Abhängingkeit von a, b und $\bar{I}$.

ii) $C = a + bY$

i) $Y = C + \bar{I}$



i) $\Leftrightarrow Y - \bar{I} = C \Leftrightarrow \underline{\underline{C = Y - \bar{I}}}$

$$
\begin{array}{l} \text{i)} \\ \text{ii)} \end{array}
\left|\begin{array}{l} \boxed{Y = C + \bar{I}} \\ C = a + bY \end{array}\right|
\iff
\left|\begin{array}{l} Y = C + \bar{I} \\ C = a + b(C + \bar{I}) \end{array}\right|
$$

$$
\iff \left|\begin{array}{l} Y = C + \bar{I} \\ C = a + \boxed{bC} + b\bar{I} \end{array}\right| -bC
$$

$$
\iff \left|\begin{array}{l} Y = C + \bar{I} \\ \underbrace{C - bC}_{C\underbrace{(1-b)}_{>0}} = a + b\bar{I} \end{array}\right| :(1-b)
$$

$$
\iff \left|\begin{array}{l} Y = \boxed{C} + \bar{I} \\ \boxed{C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}\bar{I}} \end{array}\right|
$$

$$
\frac{\cancel{b\bar{I}} + \bar{I}\cdot 1 - \cancel{b\bar{I}}}{1-b}
$$

$$
\iff \left|\begin{array}{l} Y = \boxed{\frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}\bar{I}} + \bar{I}\,\frac{1-b}{1-b} \\ C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}\bar{I} \end{array}\right|
$$

$$
\iff \left|\begin{array}{l} Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}\bar{I} \\ C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}\cdot\bar{I} \end{array}\right|
$$

"Reduzierte Form"

Gleichungen und ihre Parameter: Beispiel 3.2.1

Lösung (reduzierte Form):

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}\bar{I} \text{ und } C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b}\bar{I}$$

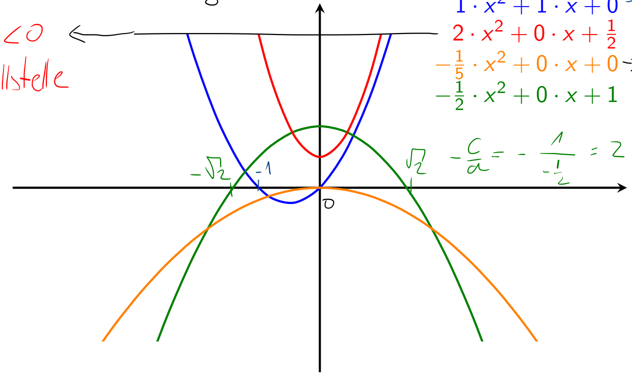
3.3 Quadratische Gleichungen

3.3 Quadratische Gleichungen: Allgemeine Form

$$\overbrace{ax^2 + bx + c}^{y} = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

Graphische Darstellung:

$y = ax^2 + bx + c$



$-\frac{c}{a} = -\frac{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} < 0$

$\rightarrow$ keine Nullstelle

$\quad a \qquad\quad b \qquad\quad c$

$1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{1}{1} = -1$

$2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{5} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = \frac{-0}{-\frac{1}{5}} = 0$

$-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$

$-\frac{c}{a} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 > 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}, \; x_2 = -\sqrt{2}$

Quadratische Gleichungen: Fall $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

Wir können auf der linken Seite der Gleichung x ausklammern:

$$x(ax + b) = 0$$

Ein Produkt zweier Faktoren ist gleich null, falls mindestens einer der beiden Faktoren gleich null ist:

$$x = 0 \text{ oder } ax + \cancel{b} = 0 \qquad -b$$

Diese beiden Gleichung bestimmen die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx = 0$:

Lösungen:

$$x = 0 \text{ oder } x = -\frac{b}{a}$$

Quadratische Gleichungen: Fall $b = 0$

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

oder

$$x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Um die Lösung zu bestimmen müssen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel ziehen.

Vorsicht! Wir können die Quadratwurzel nicht von negativen Ausdrücken bestimmen.

- Fall $-\frac{c}{a} < 0$: keine Lösung (in den rellen Zahlen)!
- Fall $-\frac{c}{a} = 0$: eine Lösung ($x = 0$)
- Fall $-\frac{c}{a} > 0$: zwei Lösungen ($x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \ \vee \ x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$)

Bestimme nun die Lösungen für die Gleichungen auf Folie 11:

- $x^2 + x = 0$
- $2x^2 + \frac{1}{2} = 0$
- $-\frac{1}{5}x^2 = 0$
- $-\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$

Die Lösungen entsprechen den x-Achsenabschnitten der Graphen.

$x_1 = 1: \quad 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 5 - 5 = 0$ ✓

$x_2 = -5: \quad (-5)^2 + 4(-5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ ✓

Beispiel: Allgemeiner Fall

Bestimme die Lösung für die Gleichung

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$2x \cdot 2 \leftarrow b$

1. binomische Formel:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x2 + 2^2) - 4 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 = 3^2$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3$ oder $x + 2 = -3$

$\Leftrightarrow x = 1$ oder $x = -5$

$a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a = b$ oder $a = -b)$

Quadratische Gleichungen: p-q-Formel

Pause bis 11 Uhr

Umformung der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

zu

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{=:p} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:q} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

p-q-Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$\Leftrightarrow -\frac{c}{a} \geq 0$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q$ gilt

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Faktorzerlegung einer quadratischen Form

Wenn x_1 und x_2 Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, gibt es keine Faktorzerlegung von $x^2 + px + q$.

Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, dann gilt $x_1 = x_2$ und $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

Beispiel Faktorzerlegung

Zerlege die quadratische Funktion in Faktoren (falls möglich):

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$$

3.4 Einige Nichtlineare Gleichungen

3.4 Nichtlineare Gleichungen

In den Wirtschaftswissenschaften sind nichtlineare Gleichungen allgegenwärtig.

Es steht aber leider keine allgemeine Methode zur Lösung all dieser Gleichungen zur Verfügung.

Oft hilft uns aber folgender Zusammenhang für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

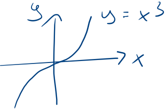
$$ab = ac \Leftrightarrow a = 0 \vee b = c$$

$ab = ac$ ist äquivalent zu $ab - ac = 0$ bzw. zu $a(b - c) = 0$.

Wenn ein Produkt gleich null ist, so muss mindestens einer seiner Faktoren gleich null sein.

Wenn $a(b - c) = 0$, dann gilt also $a = 0$ oder $b = c$.

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)



$$x^3\sqrt{x+2} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad$ oder $\quad \sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ oder $\quad x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -2$

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)

$$x(y+3)(\underbrace{\underbrace{z^2}_{\geq 0}+1}_{>0})\sqrt{w-3}=0$$

$x = 0$

oder $y = -3$

oder $w = 3$

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)

$$x^2 - 3x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x - 3x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{3}$$

Beispiel 3.4.3 für Brüche

a) $\frac{1-K^2}{\sqrt{1+K^2}} = 0$ $\quad \Big| \cdot \sqrt{1+k^2}$

$\Leftrightarrow \ 1-k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 = k^2 \ \Leftrightarrow \ k = \overbrace{-\sqrt{1}}^{=-1}$ oder $k = \overbrace{\sqrt{1}}^{+1}$

b) $\frac{45+6r-3r^2}{(r^4+2)^{3/2}} = 0$ $\quad \Big| \cdot (r^4+2)^{3/2}$

$\Leftrightarrow 45 + 6r - 3r^2 = 0 \ \overset{:(-3)}{\Leftrightarrow} \ \underset{q}{-15} \underset{p}{-2}r + r^2 = 0$

$\Rightarrow r = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1+15}$

$= 1 \pm 4$

$\Rightarrow r_1 = -3$

$r_2 = 5$

c) $\frac{x^2-5x}{\sqrt{x^2-25}} = 0$ $\quad \Big| \cdot \sqrt{x^2-25}$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = 0}$ oder $\boxed{x_2 = 5}$!

$\sqrt{0-25}$ existiert nicht

$\sqrt{25-25} = 0$

3.5 Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Implikationspfeilen

Implikationspfeile

$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ zeigen Implikationen an.

$A \Rightarrow B$ bedeutet: „Aus A folgt B."

$A \Leftarrow B$ bedeutet: „Aus B folgt A."

$A \Leftrightarrow$ bedeutet: $A \Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$.
Wir sagen auch: „A und B sind äquivalent."
oder: „A genau dann, wenn B"

Implikationspfeile sind nützlich, um Gleichungen zu lösen.

Beispiel 3.5.1: $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x)$

Beispiel 3.5.2: $x + 2 = \sqrt{4 - x}$

3.6 Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Beispiel 3.6.1

$$\begin{aligned} (2x + 3y &= 18) \iff 3y = 18 - 2x \iff \boxed{y = 6 - \tfrac{2}{3}x} \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned}$$

$3x - 4\left(6 - \frac{2}{3}x\right) = -7$

Lösungsmethode 1:

1. Löse eine der beiden Gleichungen nach einer der beiden Variablen auf.
2. Ersetze diese Variable in der anderen Gleichung durch das Resultat.

$\rightarrow$ Eine Gleichung mit einer Unbekannten

$\iff 3x \boxed{-24} + \frac{8}{3}x = -7 \quad || +24$

$\iff 3x + \frac{8}{3}x = -7 + 24 = 17$

$\iff \frac{9}{3}x + \frac{8}{3}x = 17 \iff \frac{17}{3}x = 17 \quad || \cdot \frac{3}{17}$

$\iff \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{17} \cdot x = 17 \cdot \frac{3}{17} \iff \boxed{x = 3}$

$\boxed{y = 4}$

von oben: $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot x$

$= 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 6 - 2 = 4$

Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Beispiel 3.6.1

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad \| \cdot 3 \\ 3x - 4y &= -7 \qquad \| \cdot (-2) \end{aligned}$$

Lösungsmethode 2:

1. Multipliziere beide Gleichungen mit geeigneten Zahlen, so dass eine Variable in einer Gleichung als negatives Vielfaches dieser Variable in der anderen Gleichung vorkommt.
2. Addiere beide Gleichungen, um diese Variable zu eliminieren.

$\rightarrow$ Eine Gleichung mit einer Unbekannten

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 6x + 9y &= 54 \\ -6x + 8y &= 14 \end{aligned} \quad +$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ \cancel{-6x} + \cancel{6x} + 8y + 9y &= 14 + 54 \end{aligned}$$

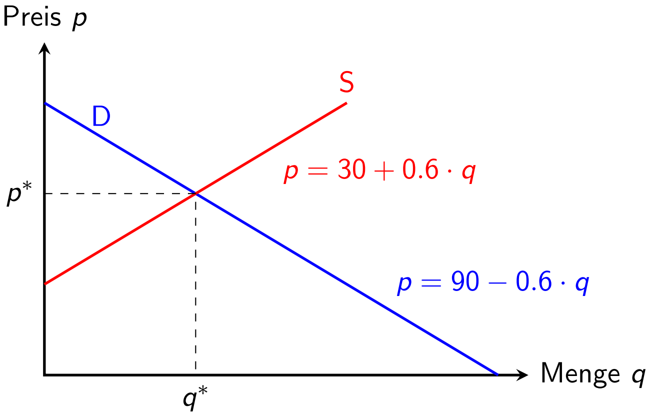
$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 17y &= 68 \qquad \| :17 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ y &= 68 : 17 = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 3 \cdot 4 &= 18 \qquad \| -12 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x &= 18 - 12 = 6 \\ (x &= 3) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Beispiel: Angebot und Nachfrage



Wie lauten p^* und q^*?

Komparative Statik

In den Wirtschaftswissenschaften bezeichnen wir die Lösung der strukturellen Form als reduzierte Form oder als „Gleichgewicht“.

Wir interessieren uns oft dafür, wie das Gleichgewicht auf Veränderungen der Rahmenbedingungen reagiert. Diese Analyse bezeichnen wir als **komparative Statik**.

Die Rahmenbedingungen fließen über die Parameter in das Gleichungssystem ein.

Beispiel: Mengensteuer

Die Mengensteuer t beeinflusst die Steigung der Nachfragefunktion.

$$p = 90 - (0.6 + t) \cdot q$$

Wie hängt das Gleichgewicht (q^*, p^*) vom Steuersatz t ab?

Allgemeines lineares 2×2-System

Wir ersetzen alle Zahlen durch Parameter:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Die Lösung (x^*, y^*) dieses Systems hängt dann von den Parametern $a, b, \ldots, f$ ab.

Die allgemeine Form hat nun zwei Vorteile:

- Wir können für jeden Anwendungsfall die Parameter $a, b, \ldots, f$ durch die entsprechenden Zahlen in der Lösung ersetzen und müssen nicht jedes Mal die Lösung neu berechnen.
- Wir können leicht prüfen, wie die Lösung auf Veränderungen der Parameter reagiert.

Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Lösungsmethode 1:

- Eine der beiden Gleichungen nach einer der beiden Variablen auflösen
- Diese Variable in die andere der beiden Gleichungen einsetzen

Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Lösungsmethode 2:

- Addition oder Subtraktion eines Vielfachen der einen Gleichung zu (oder von) der anderen, sodass eine der beiden Variablen eliminiert wird
- Die andere Variable berechnen und in eine der beiden Gleichungen einsetzen

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

<u>Falls $ae \neq bd$:</u> eindeutige Lösung

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \text{ und } y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

<u>Falls $ae = bd$ und $af \neq dc$:</u> keine Lösung

<u>Falls $ae = bd$ und $af = dc$:</u> unendlich viele Lösungen

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

(vorausgesetzt, dass $b \neq 0$.)

Geometrische Interpretation der Gleichungen

Forme das Gleichungssystem zunächst um:

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \frac{a}{b}x + y & = & \frac{c}{b} \\ \frac{d}{e}x + y & = & \frac{f}{e} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y & = & \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ y & = & \frac{f}{e} - \frac{d}{e}x \end{array}$$

$\rightarrow$ Zwei Geradengleichungen mit den Steigungen $-\frac{a}{b}$ und $-\frac{d}{e}$.

$\rightarrow$ Lösungen = Schnittpunkte dieser Geraden.

Geometrische Interpretation der drei Fälle

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \text{ und } y = \frac{f}{e} - \frac{d}{e}x$$

Unterschiedliche Steigungen, also $-\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e} \Leftrightarrow ae \neq bd$:
genau ein Schnittpunkt. $\rightarrow$ „**Schneidungsfall**„

Gleiche Steigungen, also $-\frac{a}{b} = -\frac{d}{e} \Leftrightarrow ae = bd$, so kommt es auf die y-Achsenabschnitte an:

> y-Achsenabschnitte ungleich, also $\frac{c}{b} \neq \frac{f}{e} \Leftrightarrow ce \neq fb$:
> keine Schnittpunkte. $\rightarrow$ „**Parallelfall**„
>
> y-Achsenabschnitte gleich, also $\frac{c}{b} = \frac{f}{e} \Leftrightarrow ce = fb$:
> Geraden gleich, unendlich viele „Schnittpunkte“.
> $\rightarrow$ „**Übereinstimmungsfall**“

Zusammenfassung

- Äquivalente Umformungen
- Gleichungen und ihre Parameter
- Quadratische Gleichungen
- Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten