Vorlesung zu Kapitel 02:[1]

Algebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

2.1 Die reellen Zahlen

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

2.3 Regeln der Algebra

2.4 Brüche

2.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

2.6 Ungleichungen

2.7 Intervalle und Absolutbeträge

~~2.8 Vorzeichen-Diagramme~~

2.9 Summennotation

2.10 Regeln für Summen

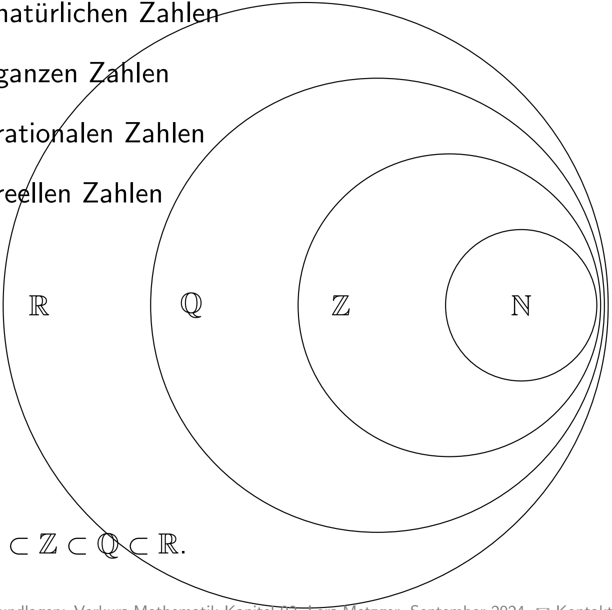
~~2.11 Newtons Binomische Formeln~~

~~2.12 Doppelsummen~~

2.1 Die reellen Zahlen

Zahlenbereiche:

- $\mathbb{N}$: die natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$: die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$: die rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$: die reellen Zahlen



Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

WiWi: unteilbare Mengen, Indizes, ...

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,\}$

WiWi: Differenzen, ...

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$

WiWi: Verhältnisse, Raten, ...

Reelle Zahlen $\mathbb{R} =$ rationale und irrationale Zahlen

irrationale Zahlen: z.B. $\sqrt{2},\ \pi, \dots$

WiWi: Optimierung (Differentialrechnung)

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$\rightarrow$ Verschoben zu Abschnitt 2.5

2.3 Regeln der Algebra

2.3 Regeln der Algebra

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Assoziativgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Binomische Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

2.4 Brüche

2.4 Brüche

Seien $m, n \in \mathbb{R}$, wobei $n \neq 0$.

Für den **Bruch** $\frac{m}{n}$ heißt die Zahl m **Zähler** des Bruches und die Zahl n heißt **Nenner** des Bruches.

Es gelten verschiedene Regeln, wie z.B.:

- $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$

  und

- $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$

Kehrwert

Zu einem Bruch $\frac{m}{n}$ ist die Zahl $\frac{n}{m}$ der Umkehrbruch bzw. der **Kehrwert** (falls $m \neq 0$).

Beispiel:

Somit ist $\frac{3}{4}$ der Umkehrbruch bzw. Kehrwert von $\frac{4}{3}$ und $\frac{6}{7}$ ist der Umkehrbruch bzw. Kehrwert von $\frac{7}{6}$.

Erweitern von Brüchen

Beim Erweitern von Brüchen werden der Zähler und der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Erweitern ändert den Wert eines Bruches nicht. Seien $k, m, n \in \mathbb{R}$, $n, k \neq 0$. Dann gilt:

- $$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$$

Beide Brüche stellen dieselbe Zahl dar.

Beispiele (erweitere mit 6 bzw. -2!)

- $\frac{1}{2} =$
- $\frac{3}{4} =$

Kürzen von Brüchen

Kürzen ist die umgekehrte Operation zum Erweitern. Dabei werden der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert. Auch Kürzen ändert den Wert eines Bruches nicht.

Seien $k, m, n \in \mathbb{R}$ mit $k, n \neq 0$. Dann gilt:

- $$\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$$

Ist k ein Teiler von m und n, sind also die Brüche $\frac{m}{k}$ und $\frac{n}{k}$ ganze Zahlen, so wird der Bruch kürzer.

Beispiele:

- $\frac{30}{40} =$
- $\frac{12}{44} =$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Es gilt für alle Zahlen $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$:

- $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{m \cdot q}{n \cdot q} + \dfrac{p \cdot n}{q \cdot n} = \dfrac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$
- $\dfrac{m}{n} - \dfrac{p}{q} = \dfrac{m \cdot q}{n \cdot q} - \dfrac{p \cdot n}{q \cdot n} = \dfrac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q}$

Spezialfall:

- $m + \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{1} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{m \cdot q + p \cdot 1}{1 \cdot q} = \dfrac{m \cdot q + p}{q}$

Hinweis:

Der Hauptnenner zweier Bruchzahldarstellungen ist der kleinstmögliche gemeinsame Nenner, auf welchen beide Brüche erweitert werden können.

Multiplikation und Division mit Zahlen

Für die Multiplikation einer Zahl $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 0$, mit einer Zahl $n \in \mathbb{R}$ gilt:

- $$\frac{p}{q} \cdot n = n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

Für die Division einer Zahl $\frac{p}{q}$ durch eine Zahl $n \neq 0$ gilt:

- $$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{n \cdot q}$$

Multiplikation mit Brüchen

Seien $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$. So gilt für die Multiplikation der beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$:

- $$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Es werden also Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert.

Beispiele:

- $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{11} =$

Division mit Brüchen

Die Division eines Bruches durch einen Bruch führt man durch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Für $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ mit $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$ gilt:

- $\dfrac{m}{n} : \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{q}{p} = \dfrac{m \cdot q}{n \cdot p}$

Beispiel:

- $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} =$

2.2 & 2.5 Potenzen mit ganzzahligen & gebrochenen Exponenten

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist a^n definiert durch:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Wir nennen a^n eine **Potenz**. Dabei heißt a **Basis** und n ist der **Exponent** (der Potenz).

Insbesondere gilt $a^1 = a$ und wir setzen $a^0 := 1$.

Hinweis: Für $a \neq 0$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Insbesondere gilt $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Potenzgesetze

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

In wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen begegnen wir Ausdrücken, wie

- $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}}$

  oder

- $g(r, p) = A \cdot r^{2.08} \cdot p^{-1.5}$.

Wie definieren wir die Potenz a^x, wenn die Basis a eine reelle Zahl ist und der Exponent x eine rationale Zahl?

Quadratwurzel

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, deren Quadrat a ist, mit $\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel** aus a):

- $b = \sqrt{a} \Longrightarrow b^2 = a$ mit $a, b \geq 0$

In der Menge der reellen Zahlen existiert eine solche Quadratwurzel b zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$.

Der Term unter dem Wurzelzeichen wird auch **Radikand** genannt. Für bspw. $\sqrt{a}$ bezeichnen wir a als den Radikanden.

Rechenregeln für Quadratwurzeln

Folgende Rechenregeln gelten für Quadratwurzeln ($a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$):

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ mit $b > 0$

Achtung:

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

n-te Wurzel

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

- $b = \sqrt[n]{a} \Longrightarrow b^n = a$

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Wie bei den Quadratwurzeln existieren auch n-te Wurzeln in der Menge der reellen Zahlen zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$.

Beispiel:

- $\sqrt[3]{8} =$

Wurzelregeln

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$. Wie bei den Quadratwurzeln gelten die Regeln:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Beispiele:

- $\sqrt[3]{27 \cdot 125} =$
- $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$

Potenzen und Wurzeln

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen ($a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$):

- $a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
- $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Wir stellen verallgemeinernd für $a \in \mathbb{R}_{\geq}$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ fest:

- $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Negative Basis?

Wenn $p, q \in \mathbb{Z}$ und q ungerade und $a \in \mathbb{R}$, dann ist $a^{p/q}$ auch für $a < 0$ definiert.

Beispiel:

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2, \text{ da } (-2)(-2)(-2) = (-2)^3 = -8$$

Wichtig:

Der Bruch p/q muss so weit wie möglich gekürzt werden!

2.6 Ungleichungen

2.6 Ungleichungen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bestehen aus:

- $\mathbb{R}_>$ den positiven Zahlen
- $\{0\}$ der Null
- $\mathbb{R}_<$ und den negativen Zahlen.

Falls $a \in \mathbb{R}$ positiv ist, also $a \in \mathbb{R}_>$, schreiben wir $a > 0$.

Falls $b \in \mathbb{R}$ negativ ist, also $a \in \mathbb{R}_<$, schreiben wir $b < 0$.

Falls zwei Zahlen a und c positiv sind, so impliziert dies:

- $a + c > 0$
- $a \cdot c > 0$

2.6 Ungleichungen

Wir können mit den Ungleichheitszeichen „$>$“ und „$<$“ Zahlen der Größe nach ordnen:

- a ist größer als b, $a > b$, falls die Differenz $a - b$ positiv ist.
- a ist gleich b, $a = b$, falls die Differenz $a - b$ null ist.
- a ist kleiner als b, $a < b$, falls die Differenz $a - b$ negativ ist.

Wenn $a > b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir $a \geq b$.

Wenn $a < b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir $a \leq b$.

Wir nennen $>$ bzw. $<$ strikte Ungleichungen und $\geq$ bzw. $\leq$ schwache Ungleichungen.

Falls der Unterschied wichtig ist, betonen wir ihn und fügen das Wort „strikt“ bzw. „schwach“ hinzu.

Eigenschaften von Ungleichungen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Wenn $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$
- Wenn $a > b$ und $c > 0$, dann ist $ac > bc$

  Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert werden, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.

- Wenn $a > b$ und $c < 0$, dann ist $ac < bc$

  Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer negtiven Zahl multipliziert werden, kehrt sich die Richtung der Ungleichung um.

- Wenn $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$

Alle vier Eigenschaften bleiben erhalten, wenn alle strikten Ungleichungen durch schwache Ungleichungen ersetzt werden.

2.7 Intervalle und Absolutbeträge

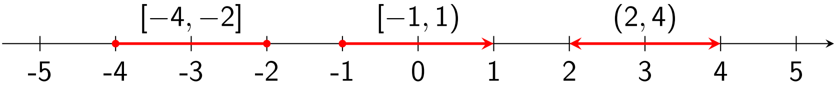
2.7 Intervalle und Absolutbeträge

Gegeben: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

Beschränktes Intervall: Menge aller Zahlen zwischen a und b.

Notation	Bezeichnung	Das Intervall besteht aus allen x mit
(a, b)	*offen*	$a < x < b$
$[a, b]$	*abgeschlossen*	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	*halboffen*	$a < x \leq b$
$[a, b)$	*halboffen*	$a \leq x < b$

Grafische Darstellung:



Innere Punkte: alle Punkte, die nicht auf dem Rand liegen.

Unbeschränkte Intervalle: $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, ...

Absolutbetrag

Gegeben: $a, b \in \mathbb{R}$

Absolutbetrag von a: Abstand zwischen a und 0.

Der Absolutbetrag der Zahl a ist die Zahl $|a|$, die definiert ist durch

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der **Abstand** zwischen a und b auf der Zahlengraden ist

$$|a - b| = |b - a| = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ b - a & \text{falls } a < b \end{cases}$$

2.9 Summennotation

und

2.10 Regeln für Summen

2.9 Summennotation

Seien $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \in \mathbb{R}$.

Kurzschreibweise für die Summe:

$$\sum_{i=1}^{6} N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

„Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i"

Falls es $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $N_p, N_{p+1}, \ldots, N_{p+n-1}$ gibt:

$$\sum_{i=p}^{p+n-1} N_i = N_p + N_{p+1} + \ldots + N_{p+n-1}$$

2.10 Regeln für Summen

Additivität

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Homogenität

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Beispiel 2.10.2

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mittlere Quadratische Abweichung:

$$s_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Zeige:

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
- $s_{xx} = \overline{xx} - \bar{x} \cdot \bar{x}$, wobei $\overline{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Zusammenfassung

- Die rellen Zahlen
- Potenzen mit ganzzahligen Exponenten
- Regeln der Algebra
- Brüche
- Potenzen mit gebrochenen Exponenten
- Ungleichungen
- Intervalle und Absolutbeträge
- Summen
- Regeln für Summen