Vorlesung zu Kapitel 02:[1]

Algebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

2.1 Die reellen Zahlen

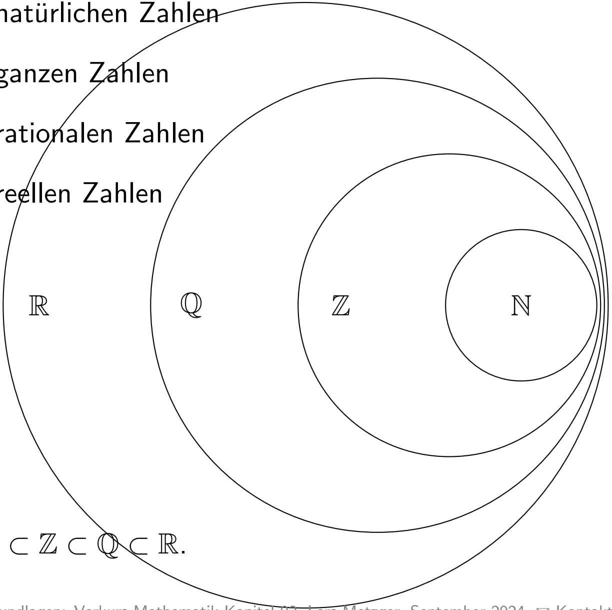
Zahlenbereiche:

$\mathbb{N}$: die natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z}$: die ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: die rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: die reellen Zahlen



Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

WiWi: unteilbare Mengen, Indizes, ...

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,\}$

WiWi: Differenzen, ...

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$

WiWi: Verhältnisse, Raten, ...

Reelle Zahlen $\mathbb{R} =$ rationale und irrationale Zahlen

irrationale Zahlen: z.B. $\sqrt{2},\ \pi, \dots$

WiWi: Optimierung (Differentialrechnung)

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$\rightarrow$ Verschoben zu Abschnitt 2.5

2.3 Regeln der Algebra

2.3 Regeln der Algebra

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Assoziativgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Binomische Formeln

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2.4 Brüche

2.4 Brüche

$m : n$

Seien $m, n \in \mathbb{R}$, wobei $n \neq 0$.

Für den **Bruch** $\frac{m}{n}$ heißt die Zahl m **Zähler** des Bruches und die Zahl n heißt **Nenner** des Bruches.

Es gelten verschiedene Regeln, wie z.B.:

- $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$

  und

- $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$

Kehrwert

Zu einem Bruch $\frac{m}{n}$ ist die Zahl $\frac{n}{m}$ der Umkehrbruch bzw. der **Kehrwert** (falls $m \neq 0$).

Beispiel:

Somit ist $\frac{3}{4}$ der Umkehrbruch bzw. Kehrwert von $\frac{4}{3}$ und $\frac{6}{7}$ ist der Umkehrbruch bzw. Kehrwert von $\frac{7}{6}$.

Erweitern von Brüchen

Beim Erweitern von Brüchen werden der Zähler und der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Erweitern ändert den Wert eines Bruches nicht. Seien $k, m, n \in \mathbb{R}$, $n, k \neq 0$. Dann gilt:

- $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m \cdot k}{n \cdot k}$

Beide Brüche stellen dieselbe Zahl dar.

Beispiele (erweitere mit 6 bzw. -2!)

- $\frac{1}{2} = \dfrac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \dfrac{6}{12}$
- $\frac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot (-2)} = \dfrac{-6}{-8} = \dfrac{6}{8}$

Kürzen von Brüchen

Kürzen ist die umgekehrte Operation zum Erweitern. Dabei werden der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert. Auch Kürzen ändert den Wert eines Bruches nicht.

Seien $k, m, n \in \mathbb{R}$ mit $k, n \neq 0$. Dann gilt:

- $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k} = \frac{\frac{m}{k}}{\frac{n}{k}}$

Ist k ein Teiler von m und n, sind also die Brüche $\frac{m}{k}$ und $\frac{n}{k}$ ganze Zahlen, so wird der Bruch kürzer.

Beispiele:

- $\frac{30}{40} = \frac{30:10}{40:10} = \frac{3}{4}$
- $\frac{12}{44} = \frac{12:4}{44:4} = \frac{3}{11}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7\cdot 4}{8\cdot 4}+\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}=\frac{28+24}{32}$$
$$=\frac{52}{32}=\frac{13}{8}$$

Es gilt für alle Zahlen $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$:

- $\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{m\cdot q}{n\cdot q}+\dfrac{p\cdot n}{q\cdot n}=\dfrac{m\cdot q+p\cdot n}{n\cdot q}$
- $\dfrac{m}{n}-\dfrac{p}{q}=\dfrac{m\cdot q}{n\cdot q}-\dfrac{p\cdot n}{q\cdot n}=\dfrac{m\cdot q-p\cdot n}{n\cdot q}$

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}+\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{7}{8}+\frac{6}{8}$$
$$=\frac{13}{8}$$

Spezialfall:

- $m+\dfrac{p}{q}=\dfrac{m}{1}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{m\cdot q+p\cdot 1}{1\cdot q}=\dfrac{m\cdot q+p}{q}$

Hinweis:

Der Hauptnenner zweier Bruchzahldarstellungen ist der kleinstmögliche gemeinsame Nenner, auf welchen beide Brüche erweitert werden können.

Multiplikation und Division mit Zahlen

Für die Multiplikation einer Zahl $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 0$, mit einer Zahl $n \in \mathbb{R}$ gilt:

- $$\frac{p}{q} \cdot n = n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

Für die Division einer Zahl $\frac{p}{q}$ durch eine Zahl $n \neq 0$ gilt:

- $$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{n \cdot q}$$

Multiplikation mit Brüchen

Seien $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$. So gilt für die Multiplikation der beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$:

- $$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n} \cdot p\right) : q = \left(\frac{m \cdot p}{n}\right) : q$$

$$= \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Es werden also Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert.

Beispiele:

- $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$ $\frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{11} =$ $\frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 11} = \frac{20}{33}$

Division mit Brüchen

Die Division eines Bruches durch einen Bruch führt man durch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Für $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ mit $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ mit $n, q \neq 0$ gilt:

- $$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Beispiel:

- $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$

2.2 & 2.5 Potenzen mit ganzzahligen & gebrochenen Exponenten

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist a^n definiert durch:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Wir nennen a^n eine **Potenz**. Dabei heißt a **Basis** und n ist der **Exponent** (der Potenz).

Insbesondere gilt $a^1 = a$ und wir setzen $a^0 := 1$.

Hinweis: Für $a \neq 0$:

- $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Insbesondere gilt $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$: 3$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$: 3$

$$\boxed{3^0 = 1}$$

$: 3$

$$3^1 = 3$$

$: 3$

$$3^2 = 9$$

$: 3$

$$3^3 = 27$$

$$3^1 = 3$$

$\cdot 3$

$$3^2 = 3 \cdot 3$$

$\cdot 3$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Potenzgesetze

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$a^m \cdot a^n$$

$$= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}}_{m+n\text{-mal}}$$

$$= a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^m \cdot \boxed{\frac{1}{a^n}}$$

$$= a^m \cdot \boxed{a^{-n}}$$

$$= a^{m+(-n)}$$

$$= a^{m-n}$$

$$(a^m)^n$$

$$= (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}})^n$$

$$\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \; \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}}_{n\text{-mal}}$$

$$= a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\text{-mal}}$$

$$= \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}_{n\text{-mal}} = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} =$$

$$\frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\text{-mal}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\text{-mal}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{-mal}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

2.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

In wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen begegnen wir Ausdrücken, wie

$\sqrt[4]{K}$

- $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}}$ $\quad (\sqrt[4]{L})^3$ $\quad \sqrt[4]{L^3}$

  oder

- $g(r, p) = A \cdot r^{2.08} \cdot p^{-1.5}$.

Wie definieren wir die Potenz a^x, wenn die Basis a eine reelle Zahl ist und der Exponent x eine rationale Zahl?

Quadratwurzel

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, deren Quadrat a ist, mit $\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel** aus a):

- $b = \sqrt{a} \Longrightarrow b^2 = a$ mit $a, b \geq 0$

In der Menge der reellen Zahlen existiert eine solche Quadratwurzel b zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$.

Der Term unter dem Wurzelzeichen wird auch **Radikand** genannt. Für bspw. $\sqrt{a}$ bezeichnen wir a als den Radikanden.

Rechenregeln für Quadratwurzeln

Folgende Rechenregeln gelten für Quadratwurzeln $(a, b \in \mathbb{R}_{\geq})$:

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ mit $b > 0$

Achtung:

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

n-te Wurzel

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

- $b = \sqrt[n]{a} \Longrightarrow b^n = a$

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Wie bei den Quadratwurzeln existieren auch n-te Wurzeln in der Menge der reellen Zahlen zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$.

Beispiel:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ✓

$\sqrt[3]{27} = 3$ $\quad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ✓

Wurzelregeln

Test: $15 \cdot 15 \cdot 15 = 27 \cdot 125$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$. Wie bei den Quadratwurzeln gelten die Regeln:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\underbrace{5 \cdot 5}_{25} \cdot 5$

$\underbrace{25 \cdot 5}_{125}$ ✓

Beispiele:

- $\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \overbrace{\sqrt[3]{27}}^{3} \cdot \overbrace{\sqrt[3]{125}}^{5} = 3 \cdot 5 = 15$
- $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$ ✓

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 16$ ✓

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$ ✓

Potenzen und Wurzeln

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen ($a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$):

- $a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
- $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Wir stellen verallgemeinernd für $a \in \mathbb{R}_{\geq}$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ fest:

- $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = (\underbrace{a^{\frac{1}{n}}}_{\sqrt[n]{a}})^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}}$

$= a^{m \cdot \frac{1}{n}}$

$= (a^m)^{\frac{1}{n}}$

Negative Basis?

Wenn $p, q \in \mathbb{Z}$ und q ungerade und $a \in \mathbb{R}$, dann ist $a^{p/q}$ auch für $a < 0$ definiert.

Beispiel:

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2, \text{ da } \underbrace{\underbrace{(-2)(-2)}_{4}(-2)}_{-8 \checkmark} = (-2)^3 = -8$$

Wichtig:

Der Bruch p/q muss so weit wie möglich gekürzt werden!

Pause bis

$10^{\underline{55}}$

2.6 Ungleichungen

2.6 Ungleichungen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bestehen aus:

- $\mathbb{R}_>$ den positiven Zahlen
- $\{0\}$ der Null
- $\mathbb{R}_<$ und den negativen Zahlen.

Falls $a \in \mathbb{R}$ positiv ist, also $a \in \mathbb{R}_>$, schreiben wir $a > 0$.

Falls $b \in \mathbb{R}$ negativ ist, also $b \in \mathbb{R}_<$, schreiben wir $b < 0$.

Falls zwei Zahlen a und c positiv sind, so impliziert dies:

- $a + c > 0$
- $a \cdot c > 0$

$\frac{a}{c} > 0$

2.6 Ungleichungen

Wir können mit den Ungleichheitszeichen „$>$“ und „$<$“ Zahlen der Größe nach ordnen:

- a ist größer als b, $a > b$, falls die Differenz $a - b$ positiv ist.
- a ist gleich b, $a = b$, falls die Differenz $a - b$ null ist.
- a ist kleiner als b, $a < b$, falls die Differenz $a - b$ negativ ist.

Wenn $a > b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir $a \geq b$.

Wenn $a < b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir $a \leq b$.

Wir nennen $>$ bzw. $<$ strikte Ungleichungen und $\geq$ bzw. $\leq$ schwache Ungleichungen.

Falls der Unterschied wichtig ist, betonen wir ihn und fügen das Wort „strikt“ bzw. „schwach“ hinzu.

Eigenschaften von Ungleichungen

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Transitivität

- Wenn $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$
- Wenn $a > b$ und $c > 0$, dann ist $ac > bc$

  Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert werden, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.

- Wenn $a > b$ und $c < 0$, dann ist $ac < bc$

  Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert werden, kehrt sich die Richtung der Ungleichung um.

- Wenn $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$

Alle vier Eigenschaften bleiben erhalten, wenn alle strikten Ungleichungen durch schwache Ungleichungen ersetzt werden.

2.7 Intervalle und Absolutbeträge

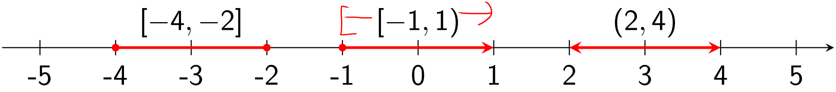
2.7 Intervalle und Absolutbeträge

Gegeben: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

Beschränktes Intervall: Menge aller Zahlen zwischen a und b.

Notation	Bezeichnung	Das Intervall besteht aus allen x mit
(a, b)	*offen*	$a < x < b$
$[a, b]$	*abgeschlossen*	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	*halboffen*	$a < x \leq b$
$[a, b)$	*halboffen*	$a \leq x < b$

Grafische Darstellung:



Innere Punkte: alle Punkte, die nicht auf dem Rand liegen.

Unbeschränkte Intervalle: $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, ...

Absolutbetrag

Gegeben: $a, b \in \mathbb{R}$

Absolutbetrag von a: Abstand zwischen a und 0.

Der Absolutbetrag der Zahl a ist die Zahl $|a|$, die definiert ist durch

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der **Abstand** zwischen a und b auf der Zahlengraden ist

$$|a - b| = |b - a| = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ b - a & \text{falls } a < b \end{cases}$$

2.9 Summennotation

und

2.10 Regeln für Summen

2.9 Summennotation

Seien $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \in \mathbb{R}$.

Kurzschreibweise für die Summe:

Endwert

$$\sum_{i=1}^{6} N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

i: Index

Startwert

„Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i"

Falls es $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $N_p, N_{p+1}, \ldots, N_{p+n-1}$ gibt:

Startwert

Endwert

$$\sum_{i=p}^{p+n-1} N_i = N_p + N_{p+1} + \ldots + N_{p+n-1}$$

zB: $P=3$

$n=10$

$p+n-1 = 3+10-1 = 12$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

2.10 Regeln für Summen

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_n+b_n$$

$$= \underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n} + \underbrace{b_1+b_2+\dots+b_n}$$

Additivität

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}-b_i$$

Homogenität

$$\sum_{i=1}^{n}ca_i=c\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$ca_1+ca_2+\dots+ca_n=c\underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_n)}$$

Beispiel 2.10.2

Arithmetisches Mittel:

x_i: Beobachtungen
n: Stichprobengröße

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mittlere Quadratische Abweichung:

$$s_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Zeige:

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
- $s_{xx} = \overline{xx} - \bar{x} \cdot \bar{x}$, wobei $\overline{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

"Satz von Steiner"

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \overbrace{-\bar{x}}^{=b}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\bar{x}) \qquad (\text{mit } b = -\bar{x})$$

$$(x_i + b)$$

$$\underbrace{-\bar{x} + (-\bar{x}) + \dots + (-\bar{x})}_{n\text{-mal}}$$

$$= n\cdot(-\bar{x}) = -n\bar{x}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\bar{x}} + \frac{1}{n}\cdot(-n\bar{x}) = \bar{x} + \frac{-\cancel{n}\cdot\bar{x}}{\cancel{n}}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

2. binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\overline{xx}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -2x_i\cdot\bar{x} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}_{\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\bar{x}^2}$$

$$+ (-2)\bar{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{x}}$$

$$= \overline{xx} - 2\overbrace{\bar{x}\cdot\bar{x}}^{=\bar{x}^2} + \bar{x}^2$$

$$= \overline{xx} - \bar{x}\bar{x}$$

Zusammenfassung

- Die rellen Zahlen
- Potenzen mit ganzzahligen Exponenten
- Regeln der Algebra
- Brüche
- Potenzen mit gebrochenen Exponenten
- Ungleichungen
- Intervalle und Absolutbeträge
- Summen
- Regeln für Summen