

Wesentliches aus der Logik und der Mengenlehre



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

1.1 Wesentliches aus der Mengenlehre

1.2 Wesentliches aus der Logik

1.3 Mathematische Beweise

1.4 Mathematische Induktion

1.1 Wesentliches aus der Mengenlehre

Definitionen: Menge, Teilmenge, Elemente

Eine **Menge** ist eine Vereinigung von Objekten. Wir nennen die Objekte **Elemente**.

$$\text{Schreibweise: } S = \{a, b, c\}$$
$$a \in S$$

Die Menge A ist eine **Teilmenge** der Menge B , wenn jedes Element aus A auch ein Element aus B ist.

$$\text{Schreibweise: } A \subseteq B$$

A ist eine **echte Teilmenge** von B , falls $A \subseteq B$ und $B \not\subseteq A$.

$$\text{Schreibweise: } A \subset B$$

Definitionen: Gleichheit, leere Menge, Mächtigkeit

Zwei Mengen A und B sind **gleich**, falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Enthält eine Menge A kein Element, so heißt diese Menge **leere Menge**.
Schreibweise: $A = \emptyset$

Die Anzahl von Elementen einer Menge A heißt **Mächtigkeit**.

Schreibweise: $|A|$

Bemerkungen zur Definition einer Menge:

- ▶ Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet, d.h. die Reihenfolge der Elemente ist egal.
- ▶ Die Elemente dürfen auch mehrfach in der Menge vorkommen, sie werden dabei aber jeweils nur einmal gezählt.
Z.B. $\{1, 2, 3, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ mit $|\{1, 2, 3, 3, 4\}| = 4$.
- ▶ Jede Menge enthält sich selbst, selbst die leere Menge!
- ▶ Die Elemente einer Menge müssen nicht gleichen Typs sein.
Z.B. $A = \{\text{Haus}, \text{Katze}, 4\}$
- ▶ Ökonomische Beispiele für Mengen:
Budgetmenge: alle Güterbündel, die man sich leisten kann
Bessermenge: alle Güterbündel, die man besser findet
Informationsmenge: Alle Entscheidungsknoten, welche nicht unterscheidbar sind

Beispiel Teilmengen

Stelle eine komplette Liste aller verschiedenen Teilmengen der Menge

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

auf!

Spezifikation einer Eigenschaft

Für eine Teilmenge B von A , also $B \subseteq A$, gilt oft, dass B solche Elemente aus A enthält, die eine bestimmte **Bedingung** erfüllen.

Man schreibt dann

$$B = \{x \in A : x \text{ erfüllt Bedingung } C\}$$

Das Zeichen „:“ bedeutet „für die gilt“.

Manchmal schreibt man synonym „|“.

Beispiele für Mengen mit Spezifikationen

- ▶ Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

- ▶ Positive reelle Zahlen

$$\mathbb{R}_{>} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

- ▶ Nicht-negative reelle Zahlen

$$\mathbb{R}_{\geq} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

- ▶ Natürliche Zahlen und Null

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$$

- ▶ Budgetmenge (mit Preis $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{>}^2$ und Geld $m \in \mathbb{R}_{>}$)

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{\geq}^2 : p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq m\}$$

Mengenoperationen

Notation	Name	Die Menge besteht aus den Elementen,
$A \cup B$	A Vereinigung B	die zu A oder ² zu B gehören.
$A \cap B$	A Durchschnitt B	die zu A und zu B gehören.
$A \setminus B$	A minus B	die zu A , aber nicht zu B gehören.

Daher gilt

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

²In der Mathematik wird „oder“ als „und oder“ verstanden.

Beispiel 1.1.1

Seien

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } B = \{3, 6\}.$$

Bestimme

▶ $A \cup B$

▶ $A \cap B$

▶ $A \setminus B$

▶ $B \setminus A$

Definitionen: Disjunkt, Familie, Grundmenge, Komplement

Zwei Mengen A und B , die keine gemeinsamen Elemente haben, sind **disjunkt**. Schreibweise: $A \cap B = \emptyset$

Eine Menge von Mengen nennt man **Familie** von Mengen.

Sind alle Mengen einer Familie Teilmengen einer gleichen Menge Ω , so bezeichnet man die Menge Ω als **Grundmenge**.

Für eine Teilmenge A einer Grundmenge Ω bezeichnet $\Omega \setminus A$ das **Komplement** von A in Ω . Schreibweise: $A^c = \Omega \setminus A$

Beispiel 1.1.2

- ▶ Ω : alle Studierenden der TU Dortmund
- ▶ F : alle Studentinnen
- ▶ M : alle Mathe-Studierenden
- ▶ C : alle Studierenden im Chor
- ▶ B : alle Bio-Studierenden
- ▶ T : alle Studierenden, die Tennis spielen

Beschreibe

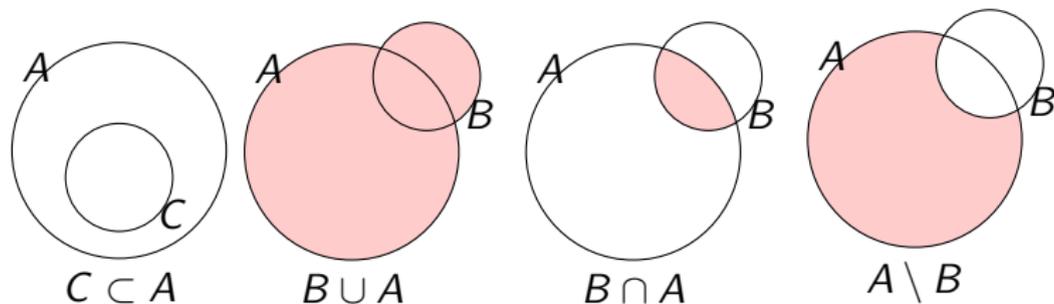
- ▶ $\Omega \setminus M$
- ▶ $M \cup C$
- ▶ $F \cap T$
- ▶ $M \setminus (B \cap T)$
- ▶ $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$

F , M , C , B und T wie zuvor

Schreibe die folgenden Aussagen in Mengennotation:

- i) Alle Biologie-Studierende sind Mathematik-Studierende.
- ii) Es gibt weibliche Studierende der Biologie im Universitätschor.
- iii) Kein Tennisspieler studiert Biologie.
- iv) Die weiblichen Studierenden, die weder Tennis spielen noch zum Universitätschor gehören, studieren alle Biologie.

Venn-Diagramme



Beispiel: Mengenoperationen

1.: $(A \cap B) \setminus C$

5.: $B \setminus (C \cup A)$

2.: $(B \cap C) \setminus A$

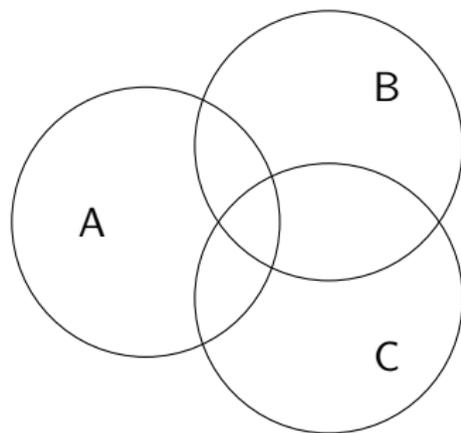
6.: $C \setminus (A \cup B)$

3.: $(C \cap A) \setminus B$

7.: $A \cap B \cap C$

4.: $A \setminus (B \cup C)$

8.: $(A \cup B \cup C)^c$



Beispiel Venn-Diagramme

Welche der folgenden Formeln sind gültig?

Nutze ein Venn-Diagramm zur Begründung!

a) $A \setminus B = B \setminus A$

b) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

c) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Gebe ein Gegenbeispiel, falls eine Aussage falsch ist.

1.2 Wesentliches aus der Logik

Aussage, offene Aussage

Aussage: Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- ▶ Falls $x \in A$, dann gilt auch $x \in B$.
- ▶ Falls $x > 3$, dann gilt auch $x > 2$.
- ▶ Jedes Rechteck ist ein Quadrat.

Offene Aussage: Aussage, die von einer Variablen abhängt.

- ▶ Jedes Rechteck mit den Kantenlängen a und b ist ein Quadrat.
- ▶ Zum Preis p herrscht Markträumung.

Implikationen

Seien P und Q zwei verschiedene Aussagen.

Falls gilt „Wenn P wahr ist, dann ist notwendig auch Q wahr“, dann schreiben wir

$$P \Rightarrow Q .$$

Das Symbol \Rightarrow ist ein **Implikations-Pfeil**.

Falls zusätzlich

$$P \Leftarrow Q$$

gilt, schreiben wir

$$P \Leftrightarrow Q .$$

Das Symbol \Leftrightarrow ist eine **Äquivalenz-Pfeil**.

Beispiele für korrekte Implikationen

a) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

b) $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$

c) S ist ein Quadrat. $\Rightarrow S$ ist ein Rechteck.

d) Sie lebt in Paris. \Rightarrow Sie lebt in Frankreich.

Beispiele für korrekte Äquivalenzen

a) $(x < -2 \text{ oder } x > 2) \Leftrightarrow x^2 > 4$

b) $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$

c) $A \subseteq B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

Kontraposition

Die Aussage $P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu der Aussage

$$\text{Nicht } Q \Rightarrow \text{Nicht } P$$

Beispiel:

- ▶ P : Es regnet.
- ▶ Q : Das Gras wird nass.

Kontraposition von $P \Rightarrow Q$:

„Wenn das Gras nicht nass wird, dann regnet es nicht.“

Beispiel Kontraposition

Nutze das Prinzip der Kontraposition, um zu zeigen:

Wenn x und y ganze Zahlen sind und xy eine ungerade Zahl ist, dann sind x und y beide ungerade.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Wenn die Aussage P die Aussage Q impliziert, wenn also $P \Rightarrow Q$, dann ist

- ▶ P eine **hinreichende Bedingung** für Q
und
- ▶ Q ist eine **notwendige Bedingung** für P .

Drei Aussagen: Welche ist falsch?

1. Leben in Frankreich ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Paris zu leben.
2. Leben in Paris ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.
3. Leben in Paris ist eine hinreichende Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.

Drei Aussagen: Welche ist richtig?

1. $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$

2. $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$

3. $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit

Aussage: „**Wenn die Inflation steigt, fällt die Arbeitslosigkeit.**“

Welche der folgenden Aussagen sind hierzu äquivalent?

- a) Damit die Arbeitslosigkeit fällt, muss die Inflation steigen.
- b) Eine hinreichende Bedingung für das Fallen der Arbeitslosigkeit ist, dass die Inflation steigt.
- c) Arbeitslosigkeit kann nur fallen, wenn die Inflation steigt.
- d) Wenn die Arbeitslosigkeit nicht fällt, steigt die Inflation nicht.
- e) Eine notwendige Bedingung für das Steigen der Inflation ist das Fallen der Arbeitslosigkeit.

1.3 Mathematische Beweise

Theorem, Satz

Ein **Theorem** oder **Satz** ist ein wichtiges Resultat; Aussage, dessen Richtigkeit mittels **Beweis** gezeigt werden kann.

Jedes Theorem kann in der Form

$$P \Rightarrow Q$$

formuliert werden.

Aussage P : **Voraussetzung, Prämisse**

Aussage Q : **Folgerung**

Direkter Beweis

Um $P \Rightarrow Q$ **direkt** zu beweisen, beginnt man mit den Voraussetzungen P und arbeitet sich schrittweise zu der Folgerung Q vor.

Beispiel:

$$\underbrace{-x^2 + 5x - 4 > 0}_P \Rightarrow \underbrace{x > 0}_Q$$

Angenommen P :

$$-x^2 + 5x - 4 > 0$$

Indirekter Beweis

Um $P \Rightarrow Q$ **indirekt** zu beweisen, beweist man die Kontraposition
direkt: nicht $Q \Rightarrow$ nicht P .

Beispiel:

$$\underbrace{-x^2 + 5x - 4 > 0}_P \Rightarrow \underbrace{x > 0}_Q$$

Angenommen nicht Q :

$$x \leq 0$$

Deduktive und induktive Schlussfolgerung

Deduktion: („Theorie“, „Mathematischer Beweis“)

Logische Schlussfolgerungen von Voraussetzungen zu zwingenden Konsequenzen.

Induktion: („Empirie“)

Man schließt von einzelnen Beobachtungen auf Eigenschaften einer Gruppe.

1.4 Mathematische Induktion

Einführendes Beispiel

Betrachtet sei die Summe der ersten n ungeraden Zahlen:

$$\begin{aligned}1 &= 1 = 1^2 \\1 + 3 &= 4 = 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2\end{aligned}$$

Vermutlich ist dies ein allgemein gültiges Muster!

Wie können wir zeigen, dass

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

auch für alle $n > 5$ gültig ist?

Einführendes Beispiel

Wir nehmen zunächst an, dass (*) für ein n gültig ist:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten $2(n + 1) - 1$:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2(n + 1) - 1$$

Die rechte Seite vereinfacht sich zu:

$$n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Aus (*) für n folgt also

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2 ,$$

was der Gleichung (*) für $n + 1$ entspricht.

Einführendes Beispiel

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

Da wir bereits berechnet haben, dass $(*)$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gilt, muss $(*)$ auch für $n = 6$ gelten.

Deswegen muss $(*)$ auch für $n = 7$ gelten.

usw.

Deswegen muss $(*)$ für alle n gelten.

Dieses Beweisverfahren heißt mathematische oder vollständige Induktion.

Mathematische Induktion

Die mathematische Induktion (oder vollständige Induktion) ist ein Beweisverfahren für eine offene Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Die Voraussetzung lautet

- (a) $A(1)$ ist wahr für $n = 1$.
- (b) Falls $A(n)$ wahr ist für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$, dann ist auch $A(n + 1)$ wahr.

Die Schlussfolgerung lautet

$A(n)$ ist wahr für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Beispiel: Vollständige Induktion

Beweise durch Induktion:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3) \quad (**)$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusammenfassung

1.1 Wesentliches aus der Mengenlehre

Mengen, Spezifikation von Eigenschaften, Mengenoperationen, Venn-Diagramme

1.2 Wesentliches aus der Logik

Aussagen, Implikationen, notwendige und hinreichende Bedingungen

1.3 Mathematische Beweise

Theorem/Satz, Beweis, Voraussetzung, Folgerung, Kontraposition, Deduktion

1.4 Mathematische Induktion