Klausur zu Ökonometrie (Master)

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 2. August 2024

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ______________

Studiengang ______________ Vorname ______________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben, welche alle zu bearbeiten sind.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Für jede der fünf Aufgaben sind maximal je 18 Punkte zu erreichen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Ein DIN-A4 Blatt mit handschriftlichen Notizen (Vorder- und Rückseite)

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Punkte Aufgabe 1 ☐ / 18

Punkte Aufgabe 2 ☐ / 18

Punkte Aufgabe 3 ☐ / 18

Punkte Aufgabe 4 ☐ / 18

Punkte Aufgabe 5 ☐ / 18

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden Aussagen beschreibt das Gauss-Markov-Theorem korrekt?

1. OLS-Schätzer sind verzerrt und haben die geringste Varianz unter allen linearen unverzerrten Schätzern.
2. OLS-Schätzer sind unverzerrt und haben die geringste Varianz unter allen linearen unverzerrten Schätzern.
3. OLS-Schätzer sind verzerrt und haben die größte Varianz unter allen linearen unverzerrten Schätzern.
4. OLS-Schätzer sind unverzerrt und haben die größte Varianz unter allen linearen unverzerrten Schätzern.

b) Erklären sie den Unterschied zwischen endogenen und exogenen Variablen in einem ökonometrischen Modell. Geben sie ein Beispiel für jede Art von Variable.

Beschreiben sie die Bedeutung und die Voraussetzungen des klassischen linearen Regressionsmodells anhand

c) der Annahmen MLR 1, MLR 3 und MLR 4,

sowie

d) der Annahmen MLR 5 und MLR 6.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes Regressionsmodell:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + u_i,\ i = 1, \dots, 1000$$

Mit folgenden OLS-Schätzungen:

$$\hat{y}_i = \underset{(.26)}{2,11} + \underset{(.13)}{0,29} \cdot x_{i1} + \underset{(.25)}{1,52} \cdot x_{i2}$$

(Standardfehler in Klammern)

Zusätzlich sei ihnen $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 8,34$ und $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 2,296$ bekannt.

a) Prognostizieren sie y_i durch $\hat{y}_i$ für $x_{i1} = 4$ und $x_{i2} = 5$.

b) Berechnen sie das Residuum $\hat{u}_i$ für $y_i = 9$.

Für das Modell

$$x_{i2} = \delta_0 + \delta_1 \cdot x_{i1} + v_i,\ i = 1, \dots, n$$

gelangen sie zu folgenden OLS-Schätzungen:

$$\hat{x}_{i1} = \underset{(0{,}03)}{0,04} + \underset{(0{,}01)}{0,49} \cdot x_{i2}$$

Die Schätzung für das Modell

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_{i1} + \epsilon_i,\ i = 1, \dots, n$$

liegt Ihnen leider nicht vor.

c) Vermuten sie, dass $\hat{\gamma}_1$ größer, kleiner oder gleich $\hat{\beta}_1$ ist? Begründen sie Ihre Antwort!

d) Geben sie $\hat{\gamma}_1$ an, falls möglich. Falls dies nicht möglich ist, begründen sie warum.

Aufgabe 3

Eine Forscherin möchte untersuchen, ob es einen signifikanten Unterschied im Einkommen zwischen Männern und Frauen gibt. Dafür wurden die folgenden Daten erhoben:

Männer (Einkommen in Euro, arith. Mittel: 3550):

$$3500, 3200, 4000, 3800, 3900, 3600, 3700, 3100, 3400, 3300$$

Frauen (Einkommen in Euro, arith. Mittel: 3050):

$$3000, 3100, 3200, 2800, 2700, 2900, 3100, 3300, 3400, 3000$$

Gegeben sei das ökonometrische Modell $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot d_i + u_i,\ i = 1, \ldots, 20$, wobei y_i das Einkommen von Person i bezeichne, d_i den Wert 1 für Männer und den Wert 0 für Frauen annimmt und u_i eine unbeobachtbare Störgröße bezeichnet. Die Annahmen MLR 1, 3, 4, 5 und 6 seien erfüllt.

a) Formulieren sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1.

b) Wie lauten $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$?

Aus der OLS Schätzung des obigen Modells resultiert die Summe der quadrierten Residuen von $SSR = 1250000$ und das Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,5$.

c) Benutzen sie diese Ergebnisse um eine geeignete Teststatistik zu berechnen. Benennen sie den Test, den sie durchführen und erklären sie kurz ihr Vorgehen.

d) Entnehmen sie einer der Tabellen des Anhangs einen geeigneten kritischen Wert und treffen sie eine Testentscheidung.

Aufgabe 4

Sie schätzen die Beziehung zwischen dem Einkommen (y, in Dollar) und den Ausgaben für Luxusgüter (x, in tausend Dollar) einer Stichprobe von 100 Haushalten aus dem Jahr 2024 (Modell 1, Standardfehler in Klammern):

$$\hat{y} = \underset{(40{,}290)}{50,1524} + \underset{(0{,}71447)}{8,78349}\ x$$

Sie speichern die quadrierten Residuen von Modell 1 und bezeichnen diese als $\hat{u}^2$. Sie regressieren nun $\hat{u}^2$ auf eine Konstante und auf das Einkommen x und erhalten Modell 2 (Standardfehler in Klammern):

$$\widehat{\hat{u}^2} = \underset{(11664{,})}{-16914,8} + \underset{(206{,}84)}{1288,63}\ x$$

a) Benennen sie einen Test, welcher den Output von Modell 2 benötigt und erklären sie, wie dieser Test funktioniert.

b) Formulieren sie die entsprechende Nullhypothese und treffen sie anhand der vorliegenden Informationen eine Testentscheidung. Wie sind die Ergebnisse von Modell 1 im Lichte dieser Testentscheidung zu interpretieren?

Sie führen mit den logarithmierten quadrierten Residuen nun eine Hilfsregression durch und speichern die prognositizierten Werte als $\widehat{\ln(\hat{u}_i^2)}$.

c) Benennen sie die Annahme an die Störterme, welche diese Hilfsregression motiviert. Welche funktionale Beziehung zwischen den Störtermen und den Regressoren wird hier angenommen?

d) Benennen sie einen Schätzer für die Varianzen der Störterme aus Modell 1, σ_i^2, und beschreiben sie, wie die Daten y_i und x_i zu transformieren sind, um das in b) identifizierte Problem zu lösen.

Aufgabe 5

Sei $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz Eins. Ein stochastischer Prozess $\{u_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch:

$$u_t = \frac{1}{2}u_{t-1} + \epsilon_t,$$

wobei $u_0 = 0$ gelte.

a) Stellen sie u_t als Ausdruck von $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t$ dar.

b) Berechnen sie den Erwartungswert von u_t.

c) Berechnen sie die Varianz von u_t. Gegen welchen Wert konvergiert diese Varianz für $t \to \infty$?

d) Berechnen sie die Kovarianzen von u_t und u_{t-1}, von u_t und u_{t-2} und von u_t und u_{t-3}. Welchen Ausdruck vermuten sie für die Kovarianz von u_t und u_{t-s} für $0 < s < t$?

Hinweis: Für $-1 < \delta < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{t} \delta^k = \frac{1-\delta^{t+1}}{1-\delta} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\delta}$$

Kritische Werte der t-Verteilung

		Signifikanzniveau				
	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 1%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-k-1$	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
	11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
	13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
	14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
	18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
	19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
	20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
	21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
	22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
	23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
	24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
	25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
	26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
	27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
	28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
	29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
	30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
	40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
	60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
	90	6,93	4,85	4,01	3,54	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52
	120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
	∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 5%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-k-1$	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
	90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
	∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

Kritische Werte der χ^2-Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits-	1	2,71	3,84	6,63
Grade	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

Lösung für Aufgabe 1

a) Die Aussage „OLS-Schätzer sind unverzerrt und haben die geringste Varianz unter allen linearen unverzerrten Schätzern.“ ist korrekt.

b) Die Variation der exogenen Variablen (Regressoren, X) soll die Variation der endogenen Variablen (Regressanden, y) erklären. Die erklärenden Variablen heißen exogen, wenn Annahme MLR 4 $E[\mathbf{u}|X] = 0$ erfüllt ist. Beispiel endogene Variable: Stundenlohn; Beispiel exogene Variable: Anzahl Bildungsjahre

c) MLR 1: $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ (endogene Variable linear in Parametern)
MLR 3: $rk(X) = k + 1$ (alle exogenen Variablen linear unabhängig)
MLR 4: $E[\mathbf{u}|X] = 0$

Die Annahmen MLR 1, 3 und 4 sind notwendig für Erwartungstreue

d) MLR 5: $\Sigma(\mathbf{u}) = \sigma^2 I$ (Störterme homoskedastisch und seriell unkorreliert)
MLR 6: $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ (Störterme normalverteilt gemäß MLR 5).

Die Annahmen MLR 5 und 6 sind notwendig für BLUE

Lösung für Aufgabe 2

a) $\hat{y}_i = 2,11 + 0,29 \cdot 4 + 1,52 \cdot 5 = 2,11 + 1,16 + 7,6 = 10,87$

b) $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = 9 - 10,87 = -1,87$

c) Es liegt ein omitted variable bias vor, da x_{i2} weggelassen wurde. Wegen $\hat{\delta}_1 = 0,49 > 0(***)$ sind x_{i1} und x_{i2} positiv korreliert. Da $\hat{\beta}_2$ signifikant ist (Daumenregel), kann das Vorzeichen des Bias durch das Vorzeichen von $\hat{\beta}_2 \cdot \widehat{Cov}(x_{i2}, x_{i1})$ geschätzt werden: Der Bias ist positiv, $\hat{\gamma}_1$ überschätzt den Parameter β_1.

d) Es gilt $\hat{\gamma}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \widehat{Cov}(x_{i2}, x_{i1})/\widehat{V}ar(x_{i1})$. Mit $\hat{\delta}_1 = \widehat{Cov}(x_{i2}, x_{i1})/\widehat{V}ar(x_{i1})$ gilt $\hat{\gamma}_1 = 0,29 + 1,52 \cdot 0,49 = 1,03$.

Lösung für Aufgabe 3

a) $H_0 : \beta_1 = 0,\ H_1 : \beta_1 \neq 0$

b) kurzer Lösungsweg: $\hat{\beta}_0$ entspricht dem arithmetischen Mittel der Einkommen der Frauen, also $\hat{\beta}_0 = 3050$. Dementsprechend entspricht $\hat{\beta}_1$ der Differenz der beiden Mittel, also $\hat{\beta}_1 = 500$.

Langer Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})(d_i - \bar{d})}{\sum_{i=1}^{20}(d_i - \bar{d})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})(1 - \frac{1}{2}) + \sum_{i=11}^{20}(y_i - \bar{y})(0 - \frac{1}{2})}{\sum_{i=1}^{10}(1 - \frac{1}{2})^2 + \sum_{i=11}^{20}(0 - \frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i - 10\bar{y} - \sum_{i=11}^{20} y_i + 10\bar{y}}{10\frac{1}{4} + 10\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{10\bar{y}_m - 10\bar{y}_f}{5} = \bar{y}_m - \bar{y}_f = 500
\end{aligned}$$

Aus $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{d}$ folgt mit $\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{y}_m + \frac{1}{2}\bar{y}_f = 3300$: $\hat{\beta}_0 = 3300 - 500 \cdot 0,5 = 3050$.

c) Es kann entweder ein globaler F-Test oder ein t-Test durchgeführt werden:

Teststatistik für globalen F-Test:

$$F = \frac{R^2/1}{(1 - R^2)/(n - 1 - 1)} = \frac{0,5}{0,5/18} = 18$$

Teststatistik für t-Test:

$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{se(\hat{\beta}_1)}$ mit $se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2\frac{1}{n}\frac{1}{\overline{dd} - \bar{d}\bar{d}}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2\frac{1}{20}\frac{1}{1/4}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2/5}$ und $\hat{\sigma}^2 = SSR/(n - 1 - 1) = 1250000/18$ ergibt sich $se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{250000/18} = \sqrt{13888,\bar{8}} = 117,85$

Die Teststatistik hat dann den Wert $t = \frac{500}{117,85} = 4,24 (= \sqrt{18})$

d)

F-Test: Kritischer Wert für $\alpha = 1\%$ und 1 bzw. 18 Freiheitsgrade: $c = 8,29$. Wegen $F = 18 > 8,29 = c$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

t-Test: Kritischer Wert für $\alpha = 1\%$ und 18 Freiheitsgrade: $c = 2,88$. Wegen $t = 4,24 > 2,88 = c$ kann die Nullhypothese verworfen werden.

Lösung für Aufgabe 4

a) Der Breusch-Pagan-Test ist mit dem Output von Modell 2 durchführbar. Es werden die quadrierten Residuen auf die erklärenden Variablen des Originalmodells regressiert. Unter Homoskedastizität sollten die erklärenden Variablen keinen Erklärungsgehalt für die quadrierten Residuen haben.

b) Die Nullhypothese lautet $H_0 : \alpha_1 = 0$, wobei α_1 den Parameter für x in Modell 2 bezeichnet. Die Teststatistik hat den Wert $t_1 = \frac{\hat{\alpha}_1 - 0}{se(\hat{\alpha}_1)} = \frac{1288{,}63}{206{,}84} = 6,23$. Der kritische Wert der t-Verteilung mit 98 Freiheitsgraden zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ lautet $c \approx 2,63$. Wegen $t_1 > c$ kann die Nullhypothese verworfen werden. Es liegt Heteroskedastizität vor.

c) Die Annahme lautet multiplikative Heteroskedastizität, dass Modell der Varianzen lautet $\sigma_i^2 = e^{\delta_0 + \delta_1 \cdot x_i}$

d) Die Varianzen aus Modell 1 können durch $\hat{\sigma}_i^2 = e^{\widehat{\ln(\hat{u}_i^2)}}$ geschätzt werden. Die transformierten Daten sind dann durch $\tilde{y}_i = y_i / \sqrt{\hat{\sigma}_i^2}$, $\tilde{\iota} = 1/\sqrt{\hat{\sigma}_i^2}$ und $\tilde{x}_i = x_i / \sqrt{\hat{\sigma}_i^2}$ gegeben.

Lösung für Aufgabe 5

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
u_1 &= \epsilon_1 \\
u_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \epsilon_2 \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2 \\
u_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \epsilon_3 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_3 \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 + \epsilon_3 \\
&\vdots \\
u_t &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\epsilon_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}\epsilon_2 + \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{t-(t-1)}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\
&= \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}$$

b)

$$E[u_t] = E\left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \epsilon_{t-k}\right] = \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{E[\epsilon_{t-k}]}_{=0} = 0$$

c)

$$Var(u_t) = Var\left(\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \epsilon_{t-k}\right) = \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{Var(\epsilon_{t-k})}_{=1} = \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 2$$

d)

$$\begin{aligned}
Cov(u_t, u_{t-1}) &= Cov\left(\frac{1}{2}u_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-1}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{Var(u_{t-1})}_{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right)} + \underbrace{Cov(\epsilon_t, u_{t-1})}_{=0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\
Cov(u_t, u_{t-2}) &= Cov\left(\frac{1}{4}u_{t-2} + \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-2}\right) = \frac{1}{4}\underbrace{Var(u_{t-2})}_{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}\right)} + \underbrace{Cov\left(\frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-2}\right)}_{=0} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\
Cov(u_t, u_{t-3}) &= Cov\left(\frac{1}{8}u_{t-3} + \frac{1}{4}\epsilon_{t-2} + \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-3}\right) = \frac{1}{8}\underbrace{Var(u_{t-3})}_{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}\right)} + \underbrace{Cov\left(\frac{1}{4}\epsilon_{t-2} + \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-3}\right)}_{=0} \\
&= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\
Cov(u_t, u_{t-s}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \text{ für } 0 < s < t
\end{aligned}$$

Zusatzinfo:

$$Corr(u_t, u_{t-s}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}}{\sqrt{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}}\sqrt{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s-1}}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \left(\frac{1}{2}\right)^s$$