

Klausur zu Ökonometrie (Master)

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

1. August 2022

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus fünf Aufgaben, welche alle zu bearbeiten sind.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Nicht-programmierbare Taschenrechner sind als Hilfsmittel für diese Klausur zugelassen.

Für jede der fünf Aufgaben sind maximal je 18 Punkte zu erreichen.

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Punkte Aufgabe 1 / 18

Punkte Aufgabe 2 / 18

Punkte Aufgabe 3 / 18

Punkte Aufgabe 4 / 18

Punkte Aufgabe 5 / 18

Gesamtpunkte / 90

Note:

Aufgabe 1

Für ein lineares Regressionsmodell

$$y = X\beta + u \quad \text{Cov}(u_i, u_j) = 0 \text{ für alle } i \neq j$$

gelte die in der Vorlesung getroffenen Annahme $rk(X) = k + 1$, wobei X eine Matrix der Ordnung $n \times k + 1$ mit $n > k + 1 \geq 1$ sei. Des Weiteren gelte die in der Vorlesung getroffene Annahme $E[u|X] = 0$, wobei u ein unbeobachteter homoskedastischer und **seriell unkorrelierter** Zufallsvektor der Ordnung n sei.

Stellen Sie folgende Größen durch X und y dar:

a) den besten linearen unverzerrten Schätzer $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

b) die Prognose \hat{y} von y und die Residuen \hat{u} des Regressionsmodells $\hat{y} = X \cdot \hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y$

Begründen Sie, warum

$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = y - X(X'X)^{-1}X'y = [I - X(X'X)^{-1}X'] \cdot y$$

c) $X'\hat{y} = X'y$ und $X'\hat{u} = 0$ gelten muss

und stellen Sie anhand von c)

d) $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i$ und $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i$ durch beobachtbare oder bekannte Zahlen dar.

$$c) X'\hat{y} = X' \cdot \underbrace{X(X'X)^{-1}X'}_I y = X'y$$

$$X'\hat{u} = X'(y - \hat{y}) = X'y - X'\hat{y} = X'y - X'y = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^L & & \\ & \square & \\ & & \end{pmatrix}$$

d) $\sum_{i=1}^n 1 \cdot \hat{y}_i = 1 \cdot \hat{y}_1 + 1 \cdot \hat{y}_2 + \dots + 1 \cdot \hat{y}_n = L' \hat{y}$; 1. Komponente von $X' \hat{y}$

Also $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n y_i$

$= L'y = \sum_{i=1}^n y_i$

1. Komponente von $X'y$

Alternativ: in VL wurde gezeigt: $\bar{\hat{y}} = \bar{y}$
oder $\bar{\hat{u}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = L' \hat{u}$$

1. Komponente von $X' \hat{u} = 0$

$$\Rightarrow L' \hat{u} = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0}$$

Aufgabe 2

In der Vorlesung haben Sie einige Testverfahren kennengelernt.

Im Folgenden sind einige Nullhypothesen aufgelistet:

1. Der Parameter des zweiten Regressors hat den Wert 5. *nur eine Restriktion \rightarrow t-Test*
2. Die Störterme sind seriell unkorreliert. *\rightarrow erst später*
3. Alle Parameter mit Ausnahme des Parameters der Konstanten haben den Wert 0. *$\beta_1=0, \beta_2=0, \dots, \beta_g=0$
"globaler F-Test"*
4. Die Störterme sind homoskedastisch.
5. Die Parameter für Beobachtungen i mit der Ausprägung $d_i = 1$ sind verschieden von den Parametern für die Beobachtungen i mit der Ausprägung $d_i = 0$. *Test auf Strukturbruch*

Ordnen Sie folgender Tabelle den jeweiligen Tests die jeweils damit zu überprüfende Nullhypothese zu. Geben Sie hierbei die Ordnungszahl aus obiger Liste an. Mehrfachnennungen sind möglich.

Test	Nullhypothese
t-Test	1.
Chow-Test	5.
F-Test	3.
Breusch-Pagan-Test	4.
White-Test	4.
Breusch-Godfrey-Test	
Durbin-Watson-Test	

Aufgabe 3

Ihnen liegen zu erklärende Daten y_i und der strikt exogene Regressor x_i für $i = 1, \dots, 26$ vor. Zusätzlich verfügen Sie über die Information d_i zu jeder Beobachtung, welche entweder den Wert 1 oder 0 hat. Sie sind sich nicht sicher, ob die Effekte von x auf y von d abhängen. \rightarrow Chow-Test

Sie führen nun zwei Regressionen durch:

Modell 1:

restringiertes Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + u_i$$

Restriktion (H_0):
 $\gamma_1 = 0 \ \& \ \gamma_2 = 0$

und Modell 2:

unrestringiertes Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \gamma_1 \cdot d_i + \gamma_2 \cdot d_i \cdot x_i + u_i$$

und erhalten folgende zwei Resultate (mit Standardfehlern in Klammern):

OLS-Schätzung von Modell 1:

$$\hat{y} = -16,8255 + 0,203630 x$$

(61,6503) (1,13826)

mit $n = 26$ und $SSR_r = 589433,6$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/2}{SSR_{ur}/22} = \frac{(589433,6 - 417732,1)/2}{417732,1/22} = 4,521$$

OLS-Schätzung von Modell 2:

$$\hat{y} = -47,6919 - 2,19051 x - 105,661 d + 4,54092 d \cdot x$$

(71,1297) (1,39484) (111,345) (2,01559)

mit $n = 26$ und $SSR_{ur} = 417732,1$

- Formulieren Sie die Nullhypothese eines Chow-Tests auf Parameterstabilität mit der Alternative eines Strukturbruchs in dem Parameter von x in Bezug auf das Charakteristikum d . $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$
- Ermitteln Sie den Wert der Teststatistik zum Test dieser Nullhypothese und geben Sie deren Verteilung an. $F = 4,5 \quad F \sim F_{2,22}$
- Ermitteln Sie anhand einer passenden Tabelle aus dem Appendix einen kritischen Wert zum Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$. $C = 3,44$
- Interpretieren Sie das Testergebnis und begründen Sie Ihre Testentscheidung.

Es gilt $F > C \Rightarrow H_0$ verwerfen

Es gibt einen Strukturbruch

Aufgabe 4

Sie erheben 196 Beobachtungen für das Modell 1

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + u_i$$

und erhalten folgende OLS-Schätzung:

$$\hat{y} = -2,49945 - 4,00441 x_1 + 2,30620 x_2 - 1,66214 x_3$$

(29,038)
(0,31498)
(0,33421)
(0,33346)

$Var(u_i) = \sigma^2$

Mit Standardfehlern in Klammern, $R^2 = 0,531504$.

Gehen Sie davon aus, dass die Regressoren strikt exogen sind und dass die Störterme unabhängig und identisch normalverteilt sind.

$E[u_i | x] = 0$ $u_i \stackrel{iid}{\sim} N$ $\Rightarrow \text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Führen Sie folgende Tests aus und begründen Sie die einzelnen Schritte.

Im Anhang der Klausur finden Sie entsprechende statistische Tabellen mit kritischen Werten.

- a) Testen Sie $H_0 : \beta_2 = 3$ gegen $H_1 : \beta_2 \neq 3$ auf dem 5%-Signifikanzniveau. *t-Test*
- b) Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Parameter β_2 an, welches diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% umschließt. Bestätigen Sie hiermit Ihre Antwort von a).
- c) Testen Sie $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ gegen $H_1 : \beta_1 \neq 0$ oder $\beta_2 \neq 0$ oder $\beta_3 \neq 0$ auf dem 1% Signifikanzniveau. *F-Test! (globaler)*

Sie definieren die neue Variable $z_i = x_{i3} + 2 \cdot x_{i1}$ und schätzen das Modell 2:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \alpha_3 z_i + u_i$$

Sie erhalten folgendes Resultat:

$$\hat{y} = -2,49945 - 0,680132 x_1 + 2,30620 x_2 - 1,66214 z$$

(29,038)
(0,71637)
(0,33421)
(0,33346)

mit Standardfehlern in Klammern.

- d) Testen Sie $H_0 : \beta_1 = 2\beta_3$ gegen $\beta_1 \neq 2\beta_3$ für das Modell 1, wobei Sie das von Ihnen gewählte Verfahren durch die Schätzung von Modell 2 begründen.

alles Modell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + u_i$

$- \beta_3 \cdot 2x_{i1} \qquad + \beta_3 \cdot 2x_{i1}$

$$= \beta_0 + \underbrace{(\beta_1 - 2\beta_3)}_{\alpha_1} x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 \underbrace{(x_{i3} + 2x_{i1})}_{z_i} + u_i$$

t-Statistik: $t = \frac{\hat{\alpha}_1 - 0}{sd(\hat{\alpha}_1)} = \frac{-0,6801}{0,716} = -0,95$

Kritischer Wert $C = 1,97$

$|t| < C \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen.

a) t-Test! $H_0: \beta_j = 3$

$$t\text{-Statistik} = \frac{\hat{\beta}_j - \gamma}{\text{se}(\hat{\beta}_j)} = \frac{2,31 - 3}{0,33} = \frac{-0,69}{0,33} = -2,09$$

Kritischer Wert

($\alpha = 5\%$, $n - k - 1 = 192$)

$$c = 1,97$$

$$|t| = 2,09 > 1,97 = c \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen}$$

b) Konfidenzintervall für β_j : $[\hat{\beta}_j - c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j); \hat{\beta}_j + c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)]$

hier: (nur obere Grenze) $2,31 + 1,97 \cdot 0,33 = 2,96 < 3$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\hat{\beta}_2 \quad \quad c \quad \quad \text{se}(\hat{\beta}_2)$

3 liegt nicht im Konfidenzintervall $\Leftrightarrow H_0: \beta_2 = 3$ verwerfen!

c) globaler F-Test:

$$F = \frac{R^2 / k}{(1 - R^2) / (n - k - 1)}$$

hier $k = 3$

$$n - k - 1 = 192$$

$$R^2 = 0,532$$

$$= \frac{0,532 / 3}{(1 - 0,532) / 192} = \frac{0,177}{0,0024} = 72, \dots$$

Kritischer Wert $c = 3,9$

$F > c \Rightarrow H_0: \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ verwerfen

Aufgabe 5

Ihnen liegen 87 Beobachtungen $\{x_i, y_i\}$ für das Regressionsmodell („Modell 1“) vor:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

Sie schätzen Modell 1 zunächst per OLS und erhalten folgende Gleichung:

$$\hat{y} = -3,12424 - 2,99936 x$$

$\hat{\beta}_0$ $\hat{\beta}_1$
(5,1014) (0,33045)

Sie sind sich unsicher, ob die unbeobachtbaren Fehlerterme die Annahme MLR 5 (Homoskedastizität und serielle Unkorreliertheit) erfüllen und speichern die Residuen \hat{u} aus der OLS-Schätzung von Modell 1.

Sie schätzen nun Modell 2

$$\hat{u}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 \hat{u}_{i-1} + \epsilon_i$$

*serielle Korreliertheit!
(später)*

und erhalten folgende Gleichung (Standardfehler in Klammern):

$$\hat{u}_i = 1,61370 - 0,105203 x_i + 0,832873 \hat{u}_{i-1}$$

(2,9184) (0,18855) (0,061527)

- Für welchen Test ist die Schätzung von Modell 2 notwendig?
- Welche Nullhypothese wird mit diesem Test geprüft?
- Wie lautet die Test-Statistik, die Sie für diesen Test berechnen müssen? Welcher Verteilung unterliegt diese?
- Wie lautet der kritische Wert dieser Verteilung zu einem Signifikanzniveau von 1%? Lehnen Sie die Nullhypothese ab?

Kritische Werte der t -Verteilung

		Signifikanzniveau				
		10%	5%	2,5%	1%	0,5%
einseitig:		10%	5%	2,5%	1%	0,5%
zweiseitig:		20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits- grade	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 1%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
	11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
	13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
	14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
	18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
	19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
	20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
	21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
	22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
	23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
	24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
	25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
	26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
	27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
	28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
	29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
	30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
	40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
	60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
	90	6,93	4,85	4,01	3,54	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52
	120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
	∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

Kritische Werte der F-Verteilung zum Signifikanzniveau von 5%

		Anzahl der Restriktionen									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n - k - 1$	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
	25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
	26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
	40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
	60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
	90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94
	120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
	∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83

Kritische Werte der χ^2 -Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits- Grade	1	2,71	3,84	6,63
	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89