Übung zu Kapitel GLS: Das verallgemeinerte lineare Regressionsmodell

Aufgabe 1

Betrachte das folgende Modell zur Erklärung vom monatlichen Bierkonsum:

$$\text{Bier}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{Gehalt}_i + \beta_2 \text{Preis}_i + \beta_3 \text{Bildung}_i + \beta_4 \text{Frau}_i + u_i.$$

Angenommen, es gelte

MLR 4 ✓

$$E[u_i | \text{Gehalt}_i, \text{Preis}_i, \text{Bildung}_i, \text{Frau}_i] = 0$$

und

$Cov(u_i, u_j | X) = 0$

MLR 5'

"G"

$$Var(u_i | \text{Gehalt}_i, \text{Preis}_i, \text{Bildung}_i, \text{Frau}_i) = \sigma^2 \text{Gehalt}_i^2.$$

Transformiere die Modellgleichung so, dass die Fehler im neuen Modell MLR 5 erfüllen.

$$\Sigma(u|x) = \begin{pmatrix} Var(u_1|x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Var(u_2|x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Var(u_n|x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 G_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma^2 G_2^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \sigma^2 G_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} G_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & G_2^2 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & G_n^2 \end{pmatrix}}_{\Omega}$$

Gesucht: Z mit $Z \cdot Z' = \Omega$

P mit $P = Z^{-1} \Rightarrow P'P = \Omega^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_2} & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & \frac{1}{G_n} \end{pmatrix}$$

Transformiertes Modell

$\tilde{y} = P \cdot y$, $\tilde{X} = P \cdot X$

$$P \cdot y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \cdot B_1 \\ \frac{1}{\sigma_2} B_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n} B_n \end{pmatrix}}_{\tilde{y}}$$

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \\ \frac{1}{\sigma_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sigma_1} \\ \frac{p_2}{\sigma_2} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\frac{Bier_i}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma_i} \cdot \beta_0 + 1 \cdot \beta_1 + \frac{Preis_i}{\sigma_i} \cdot \beta_2 + \frac{Bildung_i}{\sigma_i} \beta_3 + \frac{Frau_i}{\sigma_i} \beta_4 + \frac{u_i}{\sigma_i}$$

Erfüllt $\frac{u_i}{\sigma_i}$ MLR 5 ?

$$Cov\left(\frac{u_i}{\sigma_i}, \frac{u_j}{\sigma_j} \middle| X\right) = \frac{1}{\sigma_i} \cdot \frac{1}{\sigma_j} \overbrace{Cov(u_i, u_j | X)}^{=0} = 0 \checkmark$$

$$Var\left(\frac{u_i}{\sigma_i} \middle| X\right) = \frac{1}{\sigma_i^2} \underbrace{Var(u_i | X)}_{\sigma^2 \cdot \sigma_i^2} = \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma^2 \cdot \sigma_i^2 = \sigma^2 \checkmark$$

Aufgabe 2

Betrachte das Regressionsmodell $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ unter der Annahme, dass

$$\Sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{n_2} \end{pmatrix}, \text{wobei}$$

die Stichprobe mit n Beobachtungen in zwei Stichproben mit den Beobachtungen 1 bis n_1 und $n_1 + 1$ bis n mit den Größen n_1 und $n_2 = n - n_1$ aufgeteilt wird und σ_1^2 und σ_2^2 positive Skalare sind.

- Finde eine Matrix P, sodass mit $\tilde{X} = PX$ und $\tilde{\mathbf{y}} = P\mathbf{y}$ der OLS-Schätzer $\tilde{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{\mathbf{y}}$ BLUE ist.
- Gebe die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ an!

$$\Sigma(\upsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & O(N) \\ N & \sigma_2^2 I_{n_2} \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} I_{n_1} & N \\ N & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} I_{n_2} \end{pmatrix}}_{\Omega}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} I_{n_1} & N \\ N & \frac{\sigma}{\sigma_2} I_{n_2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = P \cdot y = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\sigma_2} I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \\ y_{n_1+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \end{matrix}}\right\} n_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \end{matrix}}\right\} n_2 = n - n_1 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} y_1 \\ \vdots \\ \frac{\sigma}{\sigma_1} y_{n_1} \\ \frac{\sigma}{\sigma_2} y_{n_1+1} \\ \vdots \\ \frac{\sigma}{\sigma_2} y_n \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sigma_1} \\ \frac{y_{n_1}}{\sigma_1} \\ \frac{y_{n_1+1}}{\sigma_2} \\ \frac{y_n}{\sigma_2} \end{pmatrix}$$

$\tilde{X} = PX$: multipliziere die ersten n_1 Zeilen von X mit $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ und die restlichen Zeilen von X mit $\frac{\sigma}{\sigma_2}$

MLR1: $\tilde{y} = Py = P(X\beta + u)$

$= PX\beta + Pu$

$= \tilde{X}\beta + \tilde{u}$

$\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{u}$ MLR1 ✓

MLR3: $rg(\tilde{X}) = rg(PX)$

$= \min\{rg(P), rg(X)\}$

$P_{n\times n}$ voller Spaltenrang, da $\Omega_{n\times n}$ pds

$= \min\{n, \overset{(MLR3)}{k+1}\}$

$= k+1$ MLR3 ✓

MLR4: $E[\tilde{u}|\tilde{X}] = E[Pu|PX] = P\underbrace{E[u|PX]}_{MLR4\, = 0}$

$= P\cdot 0 = 0$ ✓

MLR5: $Var(\tilde{u}|X) = Var(Pu|X)$ $()'$

$= P\underbrace{Var(u|X)}\,P'$

$= P\cdot\sigma^2\Omega P'$

$= \sigma^2 P\Omega P'$

$= \sigma^2 P Z\cdot Z' P'$

$\tilde{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}$ BLUE $= \sigma^2 \underbrace{Z^{-1}Z}_{I}(\underbrace{PZ}_{I})' = \sigma^2\cdot I$ ✓

$$\mathbb{V}(\tilde{\beta} \mid \tilde{X}) = \sigma^2 (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} = \dots = \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\beta} \mid X) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$