Kapitel 12:

Serielle Korrelation in Zeitreihen

Moodle

Lehrbuch

Das klären wir in diesem Kapitel:

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

Autoregressive Prozesse erster Ordnung

FGLS bei Autokorrelation

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

- OLS ist unverzerrt und konsistent.
- Das Bestimmtheitsmaß R^2 ist valide.
- OLS Standardfehler und darauf basierende Tests sind nicht valide.
- OLS ist nicht effizient.

Autoregressive Prozesse erster Ordnung

AR(1) serielle Korrelation

AR(1): Autoregressiver Prozess 1. Ordnung

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \; , t = 1, \ldots, n$$

wobei:

- u_0 ein passender Startwert
- $\rho \in \mathbb{R}$: unbekannter und fester Parameter
- ϵ_t iid Zufallsvariable mit $E[\epsilon_t|X] = 0$ und $Var(\epsilon_t|X) = \sigma_\epsilon^2$

Die Kovarianz zweier Störterme bei AR(1)

Es gilt

$$Cov(u_t, u_{t-1}) = Cov(\rho u_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-1}) = \rho Var(u_{t-1}) + \underbrace{Cov(u_{t-1}, \epsilon_t)}_{=0}$$

und entsprechend:

$$Cov(u_t, u_{t-s}) = \rho^s Var(u_{t-s})$$

Stationäre autoregressive Prozesse

Ein AR(1)-Prozess

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

ist **stationär**, falls der Erwartungswert $E[u_t]$ und die Varianz $Var(u_t)$ für alle Elemente von $\{u_t\}$ identisch sind:

- $E[u_t] = \mu \ \forall \ t$
- $Var(u_t) = \sigma^2 \ \forall \ t$

Stationäre autoregressive Prozesse: $|\rho| < 1$

Für $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ mit $\rho \neq 0$ muss also gelten:

$$\underbrace{E[u_t]}_{\mu} = E[\rho u_{t-1} + \epsilon_t] = \rho \underbrace{E[u_{t-1}]}_{\mu} + \underbrace{E[\epsilon_t]}_{0} \,,$$

also $\mu = 0$ oder $\rho = 1$.

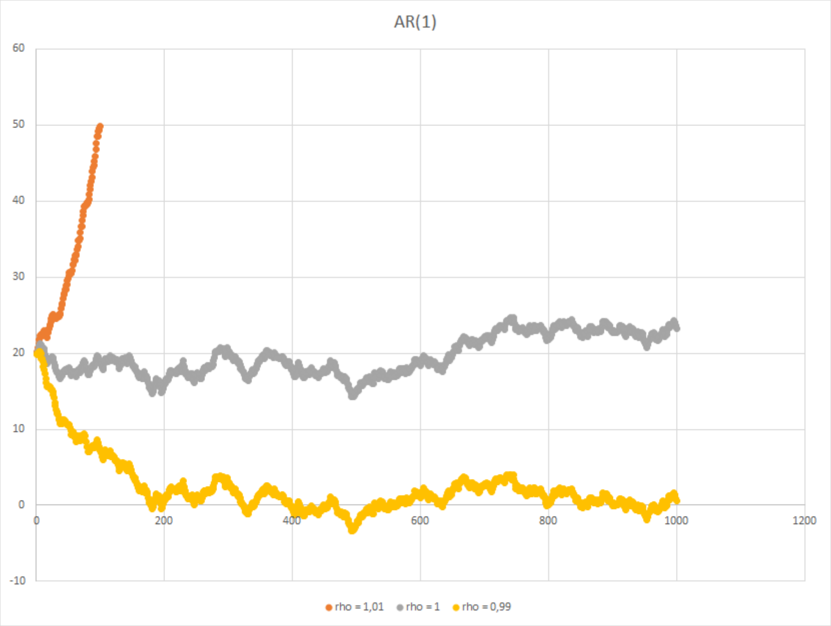
Ebenso:

$$\underbrace{Var(u_t)}_{\sigma^2} = Var(\rho u_{t-1} + \epsilon_t) = \rho^2 \underbrace{Var(u_{t-1})}_{\sigma^2} + 2\rho \underbrace{Cov(u_{t-1}, \epsilon_t)}_{0} + \underbrace{Var(\epsilon_t)}_{\sigma_\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \rho^2 \sigma^2 + \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2}$$

Damit die Varianz wohldefiniert und positiv ist, muss zusätzlich $|\rho| < 1$ gelten.

Drei AR(1) Prozesse



Varianz-Kovarianz-Matrix von stationären AR(1)

Mit $Var(u_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2} = \sigma^2$ gilt:

$$\Sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1, u_2) & \dots & Cov(u_1, u_n) \\ Cov(u_2, u_1) & Var(u_2) & \dots & Cov(u_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(u_n, u_1) & Cov(u_n, u_2) & \dots & Var(u_n) \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^n \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^n & \rho^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ω ist in diesem Fall also nur durch einen Parameter (ρ) bestimmt!

Geeignete Datentransformation: „Quasidifferenzierung“

Betrachte

$$\tilde{u}_t = u_t - \rho u_{t-1} = \rho u_{t-1} + \epsilon_t - \rho u_{t-1} = \epsilon_t,\ t = 1, \ldots, n$$

Der Transformierte Störterm $\tilde{u}_t = \epsilon_t$ ist iid, erfüllt also $\Omega = I$!

Definiere mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformierten Daten:

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = P\mathbf{y} \text{ und } \tilde{X} = PX$$

FGLS bei Autokorrelation

FGLS bei Autokorrelation

In der Praxis ist ρ nicht bekannt. Indem wir ρ durch eine Schätzung $\widehat{\rho}$ ersetzen, erhalten wir FGLS.

Zur Schätzung von $\widehat{\rho}$ können wir die OLS-Residuen $\widehat{u}_t$ des ursprünglichen Modells verwenden. Die OLS-Hilfsregression

$$\widehat{u}_t = \rho \widehat{u}_{t-1} + \epsilon_t$$

liefert den Schätzwert $\widehat{\rho}$.

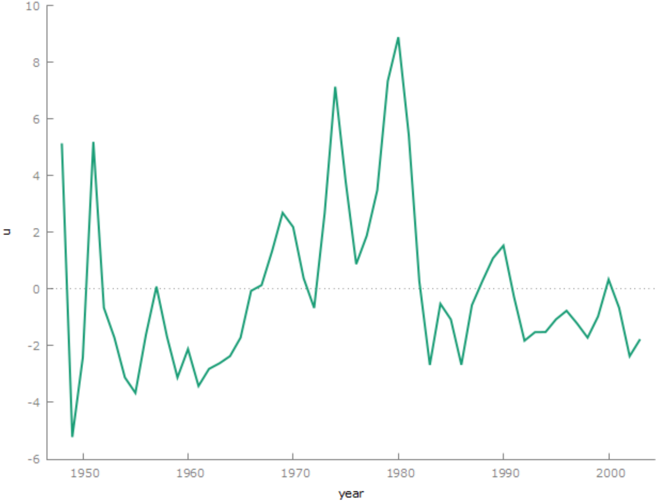
Mit diesem Schätzwert werden die Daten transformiert und die darauf angewandte OLS-Schätzung liefert den FGLS - Schätzer.

Durch die Quasidifferenzierung geht eine Beobachtung verloren. Diese spezielle FGLS - Variante heißt nach ihren Erfindern **Cochrane - Orcutt - Methode**.

Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit (Philipps-Kurve)

Benutze die Daten *philipps*.

Regressiere *inf* auf *unem* und erhalte folgende Residuen:



Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit (Philipps-Kurve)

Regressiere die Residuen auf ihren ersten Lag ($\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$):

$$\rightarrow \widehat{\hat{u}_t} = \underset{(0{,}107465)}{0,572055}\hat{u}_{t-1}$$

Der Schätzer für ρ, also $\hat{\rho} = 0,572$, ist signifikant von null verschieden (p-Wert: $2 \cdot 10^{-6}$)

Dies ist ein starker Hinweis auf Autokorrelation der Störterme.

Der t-Test ist aber nur asympotische valide (bei großen Stichproben).

Der Durbin-Watson Test

Die Durbin-Watson (DW) Statistik ist definiert durch:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Mit einigen Umformungen können wir zeigen:

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

Ist $\hat{\rho} = 0$, so ist $DW \approx 2$ und ist $\hat{\rho} = 1$, so ist $DW \approx 0$.

Für die DW-Statistik gibt es zwei kritische Werte: d_U und d_L.

$$\begin{aligned} DW &> d_U : \; H_0 \text{ kann nicht verworfen werden} \\ DW &\in [d_L, d_U] : \; \text{keine Aussage möglich} \\ DW &< d_L : \; H_0 \text{ muss verworfen werden} \end{aligned}$$

Der direkte t-Test auf $\hat{\rho}$ ist einfacher und sollte bei großen Stichproben vorgezogen werden!

Breusch-Godfrey Test

1. Schätze $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ mit OLS und speichere die Residuen $\hat{\boldsymbol{u}}$.
2. Regressiere $\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$ **und** X und berechne das Bestimmtheitsmaß R^2 dieser Regression
3. Teststatistik: $BG = (n-1)R^2 \sim_{asy} \chi^2_1$

(In gretl:
Tests $\rightarrow$ Autokorrelation. Dort wird $BG = nR^2$ berechnet.)

Der Breusch-Godfrey ist im Gegensatz zum einfachen t-Test auch dann valide, falls die Regressoren X nicht strikt exogen sind.

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

- Im Fall seriell korrelierter Störterme überschätzen die OLS-Standardfehler statistische Signifikanz, da weniger unabhängige Variation besteht.
- Serielle Korrelation-robuste Standardfehler können mit den OLS-Residuen berechnet werden.
- Das ist nützlich, da FGLS strikt Exogene Regressoren benötigt und eine sehr spezifische Form der Autokorrelation voraussetzt (AR(1) oder allgemeiner AR(q)).

$$\widetilde{se}(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{se(\hat{\beta}_j)}{\hat{\sigma}}\right)^2 \sqrt{\hat{v}}$$

Die OLS-Standardfehler $se(\hat{\beta}_j)$ werden normiert und dann mit einem Faktor $\sqrt{\hat{v}}$ „aufgeblasen“.

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Der serielle Korrelation-robuste Standardfehler heißt auch **Newey-West Standardfehler**:

$$\widetilde{se}(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{se(\hat{\beta}_j)}{\hat{\sigma}}\right)^2 \sqrt{\hat{v}}$$

Der Faktor $\hat{v}$ berechnet sich wie folgt, wobei $g \in \mathbb{N}$:

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t^2 + 2 \sum_{h=1}^{g} \left(1 - \frac{h+1}{g}\right) \sum_{t=h+1}^{n} \hat{a}_t \hat{a}_{t-1}$$

wobei

- $\hat{a}_t = \hat{r}_t \hat{u}_t$ ist und $\hat{r}_t$ das Residuum der Regression von x_{tj} auf $x_{t1}, \ldots, x_{tk}$
- g die nächste ganz Zahl an $\frac{3}{4} n^{\frac{1}{3}}$

... zum Glück brauchen wir uns diese Formel nicht zu merken!

(gretl berechnet diese robusten Standardfehler per Mausklick.)

Diskussion: robuste Standardfehler

- Diese Standardfehler sind ebenfalls robust gegenüber Heteroskedastizität und werden demnach **Heteroskedastizitäts und Autokorrelation konsistent (HAC)** genannt.
- Da gewöhnlich Stichproben von Querschnittsdaten größer sind als von Zeitreihen wurden Heteroskedastizitäts-robuste Standardfehler (aus Kapitel 8) häufiger benutzt.
- Die Newey-West Standardfehler sind bei starker Autokorrelation und kleinen Stichproben nicht sehr solide.

Zusammenfassung

- OLS ist bei Autokorrelation unverzerrt und konsistent, die Standarfehler sind aber falsch und dürfen nicht zur Inferenz benutzt werden.
- Ein AR(1)-Prozess $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ ist stationär, falls $|\rho| < 1$. ρ bezeichnet hier die (Auto-)Korrelation zwischen zwei sukzessiven Störtermen.
- Durch die Quasidifferenzierung $\tilde{u}_t = u_t - \hat{\rho} u_{t-1}$ wird die Autokorrelation von AR(1)-Prozessen neutralisiert.
- Der Durbin-Watson Test oder der Breusch-Godfrey Test können Autokorrelation feststellen.
- Mit Heteroskedastizitäts- und Autokorrelation konsistenten Standardfehlern (HAC) sind t- und F-Tests valide.