Übung zu Kapitel 12: Autokorrelation

Aufgabe 1

Sei $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz Eins. Ein stochastischer Prozess $\{u_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch:

$$u_t = \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\epsilon_{t-2}$$

- Berechne $E[u_t]$ und $var(u_t)$.
- Berechne $corr(u_t, u_{t+h})$ für $h = 1, 2, \ldots$

$$E[u_t] = E\left[\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right] = \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{E[\varepsilon_{t-1}]}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{E[\varepsilon_{t-2}]}_{=0} = 0$$

$$Var(u_t) = Var\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right) =$$

$$= Var(\varepsilon_t) + Var\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}\right) + Var\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= \underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{=1} + \frac{1}{4}\underbrace{Var(\varepsilon_{t-1})}_{=1} + \frac{1}{4}\underbrace{Var(\varepsilon_{t-2})}_{=1} = \frac{3}{2}$$

$$U_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$$

$$cov(U_t, U_{t-1}) = Cov\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-3}\right)$$

Es gilt ε_t unabhängig $\Rightarrow cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ falls $t \neq s$

$$= Cov\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}\right) + Cov\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, -\frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{Var(\varepsilon_{t-1})}_{=1} - \frac{1}{4}\underbrace{Var(\varepsilon_{t-2})}_{=1} = -\frac{3}{4}$$

$$Corr(U_t, U_{t-1}) = \frac{cov(U_t, U_{t-1})}{\sqrt{Var(U_t)}\sqrt{Var(U_{t-1})}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$Cor(U_t, U_{t-2}) = Cov\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-3} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-4}\right)$$

$$= Cov\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}\right) = \frac{1}{2}Var(\varepsilon_{t-2}) = \frac{1}{2}$$

$$Corr(U_t, U_{t-2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}, \quad corr(U_t, U_{t-s}) = 0 \ \forall \ s \geq 3$$

Aufgabe 2

Sei $\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz Eins. Ein stochastischer Prozess $\{u_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch:

$$u_t = \overset{\rho=1}{u_{t-1}} + \epsilon_t$$

- Berechne $E[u_t|u_0]$ für den Startwert $u_0 = 0$ und $var(u_t)$ in Abhängigkeit von t.
- Berechne $corr(u_t, u_{t+h})$ für $h = 1, 2, \ldots$

$$U_t = U_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \text{ iid } \quad E[\varepsilon_t] = 0 \, , \, Var(\varepsilon_t) = 1$$

$$U_1 = U_0 + \varepsilon_1$$

$$U_2 = U_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$U_3 = U_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$U_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$$

$$E[U_t | U_0] = E\left[U_0 + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k\right]$$

$$= U_0 + \sum_{k=1}^{t} \underbrace{E[\varepsilon_k]}_{=0} = U_0$$

$$Var(U_t | U_0) = Var\left(U_0 + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k\right)$$

$$= Var\left(\sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \underbrace{Var(\varepsilon_k)}_{=1} = t$$

$$Cov(U_t, U_{t-s})$$

$$= Cov\left(U_0 + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k , U_0 + \sum_{k=1}^{t-s} \varepsilon_k\right) = Cov\left(\underbrace{U_0 + \sum_{k=1}^{t-s} \varepsilon_k}_{U_{t-s}} + \sum_{k=t-s+1}^{t} \varepsilon_k , \underbrace{U_0 + \sum_{k=1}^{t-s} \varepsilon_k}_{U_{t-s}}\right)$$

$$\underbrace{Cov(U_{t-s}, U_{t-s})}_{= Var(U_{t-s}) = t-s} + \underbrace{Cov\left(\sum_{k=t-s+1}^{t} \varepsilon_k , U_0 + \sum_{k=1}^{t-s} \varepsilon_k\right)}_{=0} = t-s$$

$$Corr(U_t, U_{t-s}) = \frac{cov(U_t, U_{t-s})}{\sqrt{Var(U_t)} \sqrt{Var(U_{t-s})}} = \frac{t-s}{\sqrt{t}\sqrt{t-s}} = \sqrt{\frac{t-s}{t}}$$

Aufgabe 3

Betrachte den Datensatz *fertil3.xls* für diese Aufgabe.

- Führe die OLS-Regression

  $$cgfr_t = \gamma_0 + \delta_0 cpe_t + \delta_1 cpe_{t-1} + \delta_2 cpe_{t-2} + u_t$$

  durch.

  - *cgfr*: change general fertility rate
  - *cpe*: change personal tax exemption
- Teste, ob die Störterme u_t ein AR(1) Prozess sind.
- Transformiere das Modell per Quasidifferenzierung, wobei du ρ entsprechend schätzt.
- Teste, ob die transformierten Störterme autokorreliert sind.