technische universität dortmund

fakultät für mathematik

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Klausur – 16.02.2023

Analysis III für Lehramt

Wichtige Hinweise:

- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer lesbar in die dafür vorgesehenen Felder **oben auf allen Blättern des Bearbeitungsbogens** ein.
- Jede Aufgabe bitte **nur** auf dem dafür vorgesehenen Blatt (Vorder- und Rückseite) bearbeiten. Wenn der Platz nicht ausreicht, können Sie die angehefteten Zusatzblätter am Ende der Klausur verwenden. Verweisen Sie auf diese Seiten **gut sichtbar**, wenn Sie sie benutzen. Im Zweifel können Sie auch die Aufsichtspersonen um weitere Blätter bitten.
- Kontrollieren Sie Ihre Klausur zu Beginn bitte auf Vollständigkeit und auf ein einwandfreies Druckbild. Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben auf insgesamt 11 Blättern (inkl. Deckblatt und Zusatzblätter am Ende).
- Verwenden Sie einen blauen oder schwarzen Stift, insbesondere **keine** Bleistifte oder Rotstifte. Halten Sie Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Alle Rechen- und Beweisschritte müssen nachvollziehbar sein. Fehlende oder unvollständige Begründungen können zu Punktabzug führen.
- Als Hilfsmittel ist nur ein doppelseitig mit Ihrer eigenen Handschrift beschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt. Elektronische Geräte wie Handys, Taschenrechner oder Ähnliches sind ausgeschaltet und außer Reichweite zu verwahren. Jeder Täuschungsversuch führt zu sofortigem Ausschluss von der Klausur.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es gibt insgesamt 50 Punkte. Zum Bestehen der Klausur reichen 25 Punkte.

Viel Erfolg!

Bitte hier nichts eintragen.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**	**Note**
Max. Punkte	18	8	10	8	6	50	
Erreichte Punkte							

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Aufgabe 1)

(a) (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel einer unbeschränkten messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda(A) < \infty$. Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Messbarkeit von A ein.

(b) (2 Punkte) Wir betrachten das Dreieck $D \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Dieses besitzt bekanntlich den Flächeninhalt $\lambda^2(D) = 1/2$. Begründen Sie diese Formel **ohne** Verwendung von Cavalieri/Fubini.

(c) (2 Punkte) Handelt es sich bei $\{(x^2, x^3) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-2, 2]\}$ um eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

(d) (1 Punkt) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, die zwar Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar ist. (ohne Beweis)

(e) (3 Punkte) Wir betrachten $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-z)^2+(y-z)^2 < 4,\ 0 < z < 2\}$. Skizzen Sie die Menge Z und bestimmen Sie ihr Lebesguemaß.

(f) (2 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int_{(0,2)^3} x\mathrm{e}^{-x}\, \lambda^3(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Begründen Sie hierbei Ihre einzelnen Rechenschritte.

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

(g) (2 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x) = Ax$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ein Potential? Geben Sie für diese a ein solches Potential an.

(h) (1 Punkt) Ist durch $\Psi\colon (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Psi(u,v) = (uv, u^2v^2, 1)$ eine Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks gegeben? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) (3 Punkte) Ist jede 2-dimensionale Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^3$ auch eine Lebesgue-Nullmenge (d.h. $\lambda^3(N) = 0$)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Aufgabe 2) $(3 + 5 = 8$ Punkte)

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R},$$

auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist und verifizieren Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} f \,\lambda = \pi$.

(b) (5 Punkte) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) := \frac{k}{1+k^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für jede beschränkte stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k g \,\lambda = \pi g(0).$$

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Aufgabe 3) (5+2+3=10 Punkte)

Sei $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1(x) = x_2^2 + x_2, \quad v_2(x) = 2x_1x_2 + x_1 - x_2^2 + x_3 - x_3^2, \quad v_3(x) = x_2 - 2x_2x_3,$$

wobei jeweils $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (5 Punkte) Begründen Sie, warum v ein Gradientenvektorfeld ist, und bestimmen Sie *anschließend* alle Potentiale von v.

(b) (2 Punkte) Die Kurve $\Gamma = [\gamma]$ sei gegeben durch die Parametrisierung $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$, die die Punkte $\gamma(0) := (0,0,0)$ und $\gamma(1) := (1,2,2)$ entlang einer geraden Strecke verbindet. Berechnen Sie das Integral $\int_\Gamma \langle v, \mathrm{d}x \rangle$.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Integrale $\int_\Gamma v_k \,\mathrm{d}s$, $k = 1, 2, 3$, mit Γ aus (b).

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Aufgabe 4) (4+4=8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_M f\,\lambda^3, \quad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < z^4,\ 0 < z < \sqrt{2}\}.$$

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_S f\,\mathrm{d}\sigma, \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^4,\ 0 < z < \sqrt{2}\}.$$

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

Aufgabe 5) (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel das Integral

$$\int_M x^2\,\lambda^2(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \quad M=\{(x,y)\in(0,\infty)^2\colon x<y<3x\,,\ 2<xy<4\}.$$

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname:

1	Matrikel-Nr.:
	Name, Vorname: